Über die Strahlensysteme, deren Mittelebenen eine Kugel einhüllen

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde
einer Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Walter Glatzle
aus Obergröningen (Wttbg.)

Universitätsverlag von Robert Noske in Borna-Leipzig
1931

Berichterstatter: Professor Dr. Karl Kommerell

Von der Fakultät angenommen den 19. November 1931

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

I. Allgemeines über Strahlensysteme der Klasse 2

§ 1. Die Gleichungen der Strahlensysteme bei beliebigen Parametern u und v 2

§ 2. Die wichtigsten Formeln des K-Systems bei speziellen Parametern 5

II. Untersuchung besonderer Systeme 7

§ 3. Die Strahlensysteme $r^2 - \varrho^2 =$ konstant 7

§ 4. Formeln für die Normalensysteme und deren Orthogonalflächen 8

§ 5. Rotationssysteme 11

§ 6. Ribaucour-Normalensysteme 18

III. B-Strahlensysteme 32

IV. K-Systeme, für die $R = 0$ ist 36

§ 7. Isotrope Systeme 36

§ 8. Formeln für die Normalensysteme und Folgerungen allgemeinerer Art 40

§ 9. Beziehung zwischen Appellschen Flächen und Minimalflächen bzw. Bonnetschen Flächen 42

§ 10. Ribaucour-Normalensysteme 44

§ 11. Ribaucour-Systeme mit Rotationsflächen als erzeugenden Flächen 52

V. Zweite mehr konstruktive Betrachtungsweise der K-Systeme . . 57

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548004_0019

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit den Strahlensystemen, deren Mitteleinhüllende eine Kugel ist. Wir nennen die Kugel K, ihren Radius R, die Systeme K-Systeme. Die Aufstellung der Gleichungen für die Mittelfläche eines solchen Systems führt auf eine partielle Differentialgleichung, welche bei geeigneter Wahl der Parameterlinien leicht gelöst werden kann [§§ 1 u. 2]. Damit sind die Gleichungen des allgemeinsten K-Systems gefunden. Es gelingt auch, die Gleichungen des allgemeinsten Rotationssystems [§ 5] und die Gleichungen der Ribaucour-Normalensysteme aufzustellen [§ 6]. Dabei zeigt sich, daß diese unter die Rotationssysteme fallen, solange $R \neq 0$ ist.

Neben den K-Systemen spielen noch andere Systeme eine Rolle, die dadurch entstehen, daß man die Punkte der Mittelfläche eines K-Systems mit den Punkten verbindet, in denen die Kugel K von den entsprechenden Mittelebenen berührt wird. Diese Systeme nennen wir B-Strahlensysteme; wir suchen die Bedingung dafür, daß sie W-Systeme sind.

Für $R = 0$ artet die Mitteleinhüllende der K-Systeme zu einem Punkt aus, und die hier auftretenden Systeme stehen in einem engen Zusammenhang mit den Kongruenzen, welche Herr Professor Dr. K. Kommerell in den Math. Annalen behandelt hat [5[1]].

Es treten isotrope Systeme einfachster Art auf, die man auch von der Kinematik her gewinnen kann [§ 7].

Die Normalensysteme mit $R = 0$ wurden schon von Appell [6] und de Montcheuil [7] untersucht. Wir können aber die

[1]) Siehe Literaturverzeichnis.

Eigenschaften, welche sie gefunden haben, jetzt wesentlich leichter und rascher nachweisen [§§ 8 u. 9]. Es wird dann noch die Frage nach den Systemen behandelt, deren Orthogonalflächen nur ebene Krümmungslinien besitzen [§ 10]. Endlich werden die Ribaucour-Systeme gesucht, welche Rotationsflächen zu erzeugenden Flächen haben [§ 11].

Nach dem Vorgang der erwähnten Arbeit von K. Kommerell [5] wird in kurzen Zügen eine zweite, mehr konstruktive Behandlung der Aufgabe gezeigt, welche immerhin einige bemerkenswerte Sätze liefert.

Ohne jedesmal besonders darauf hinzuweisen, sollen nur reelle Strahlensysteme berücksichtigt werden, und zwar sollen sämtliche dabei in Betracht kommenden Funktionen im zugrundeliegenden Variabilitätsbereich genügend oft differenzierbar sein.

I. Allgemeines über Strahlensysteme der Klasse.

§ 1.

Die Gleichungen der Strahlensysteme bei beliebigen Parametern u und v.

Wir legen unseren Untersuchungen ein Rechtssystem zugrunde, dessen Ursprung zugleich Mittelpunkt der umhüllten Kugel K ist. $P(x_m, y_m, z_m)$ sei ein beliebiger Punkt (u, v) der Mittelfläche eines K-Systems. Die Richtungskosinusse des durch P gehenden Systemstrahls seien

$$X = X(u, v), \quad Y = Y(u, v), \quad Z = Z(u, v)$$

und die Mittelebene dieses Strahls durch P berühre die Kugel K in B. Dann hat B die Koordinaten

$$x_k = RX, \quad y_k = RY, \quad z_k = RZ. \tag{1a}$$

Weil nun BP ganz in der Mittelebene liegt, d. h. senkrecht auf dem Systemstrahl (X, Y, Z) steht, so lassen sich die Gleichungen für die Mittelfläche eines K-Systems in der Form ansetzen

$$(1)\qquad \begin{cases} x_m = RX + \lambda \dfrac{\partial X}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial X}{\partial v}, \\ y_m = RY + \lambda \dfrac{\partial Y}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial Y}{\partial v}, \\ z_m = RZ + \lambda \dfrac{\partial Z}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial Z}{\partial v}. \end{cases}$$

Dabei sind λ und μ gewisse Funktionen der Parameter u und v, die so beschaffen sein müssen, daß die durch die Gleichungen (1) bestimmte Leitfläche für das System (X, Y, Z) tatsächlich Mittelfläche ist. Eine genauere Bestimmung dieser Funktionen

$$\lambda = \lambda(u, v), \qquad \mu = \mu(u, v)$$

ist unsere nächste Aufgabe.

Die Kummerschen Fundamentalgrößen für die K-Systeme lauten in leicht verständlicher Abkürzung [2 S. 129]

$$E_0 = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2, \quad F_0 = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right), \quad G_0 = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2$$

und

$$\begin{aligned} \overline{D} &= -\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_m}{\partial u}\right) = -R\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 - \frac{\partial \lambda}{\partial u}\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 \\ &\quad - \lambda \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\right) - \frac{\partial \mu}{\partial u}\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right) - \mu \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}\right) \\ \overline{D'} &= -\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_m}{\partial v}\right) = -R\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right) - \frac{\partial \lambda}{\partial v}\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 \\ &\quad - \lambda \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}\right) - \frac{\partial \mu}{\partial v}\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right) - \mu \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}\right) \\ \overline{D_1'} &= -\sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_m}{\partial u}\right) = -R\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right) - \frac{\partial \lambda}{\partial u}\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right) \\ &\quad - \lambda \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\right) - \frac{\partial \mu}{\partial u}\sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 - \mu \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}\right), \\ \overline{D''} &= -\sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_m}{\partial v}\right) = -R\sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 - \frac{\partial \lambda}{\partial v}\sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right) \\ &\quad - \lambda \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}\right) - \frac{\partial \mu}{\partial v}\sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 - \mu \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}\right) \end{aligned}$$

oder

$$(2)\quad \begin{cases} \overline{D} = -RE_0 - \frac{\partial\lambda}{\partial u}E_0 - \frac{1}{2}\lambda\frac{\partial E_0}{\partial u} - \frac{\partial\mu}{\partial u}F_0 - \frac{1}{2}\mu\frac{\partial E_0}{\partial v}, \\ \overline{D}' = -RF_0 - \frac{\partial\lambda}{\partial v}E_0 - \frac{1}{2}\lambda\frac{\partial E_0}{\partial v} - \frac{\partial\mu}{\partial v}F_0 - \mu\left(\frac{\partial F_0}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G_0}{\partial u}\right), \\ \overline{D}_1' = -RF_0 - \frac{\partial\lambda}{\partial u}F_0 - \lambda\left(\frac{\partial F_0}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E_0}{\partial v}\right) - \frac{\partial\mu}{\partial u}G_0 - \frac{1}{2}\mu\frac{\partial G_0}{\partial u}, \\ \overline{D}'' = -RG_0 - \frac{\partial\lambda}{\partial v}F_0 - \frac{1}{2}\lambda\frac{\partial G_0}{\partial u} - \frac{\partial\mu}{\partial v}G_0 - \frac{1}{2}\mu\frac{\partial G_0}{\partial v}. \end{cases}$$

Für die Abszissen r_1 und r_2 der zwei Grenzpunkte eines Strahls besteht aber die Gleichung [2 S. 136]

$$(3)\quad \begin{aligned} &(E_0G_0 - F_0^2)r^2 - [\overline{D}''E_0 - (\overline{D}' + \overline{D}_1')F_0 + \overline{D}G_0]r \\ &\qquad + \overline{D}\,\overline{D}'' - \frac{1}{4}(\overline{D}' + \overline{D}_1')^2 = 0. \end{aligned}$$

Weil nun P auf der Mittelfläche liegt, so ist

$$r_1 + r_2 = 0,$$

also

$$[\overline{D}''E_0 - (\overline{D}' + \overline{D}_1')F_0 + \overline{D}G_0] = 0$$

oder nach (2)

$$\begin{aligned} &2R(E_0G_0 - F_0^2) + \frac{\partial\lambda}{\partial u}(E_0G_0 - F_0^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial G_0}{\partial u}E_0 - 2\frac{\partial F_0}{\partial u}F_0 + \frac{\partial E_0}{\partial u}G_0\right) + \frac{\partial\mu}{\partial v}(E_0G_0 - F_0^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial G_0}{\partial v}E_0 - 2\frac{\partial F_0}{\partial v}F_0 + \frac{\partial E_0}{\partial v}G_0\right) = 0. \end{aligned}$$

Schreiben wir zur Abkürzung

$$E_0G_0 - F_0^2 = \Delta_0^2,$$

so geht die Gleichung über in

$$2R\Delta_0^2 + \frac{\partial\lambda}{\partial u}\Delta_0^2 + \frac{1}{2}\lambda\frac{\partial}{\partial u}(\Delta_0^2) + \frac{\partial\mu}{\partial v}\Delta_0^2 + \frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial v}(\Delta_0^2) = 0$$

oder

$$\Delta_0 \left[2R\Delta_0 + \frac{\partial}{\partial u}(\lambda \Delta_0) + \frac{\partial}{\partial v}(\mu \Delta_0) \right] = 0.$$

Für die Funktionen $\lambda = \lambda(u, v)$ und $\mu = \mu(u, v)$ erhält man also (wegen $\Delta_0 \neq 0$) die Bedingungsgleichung

$$2R\Delta_0 + \frac{\partial}{\partial u}(\lambda \Delta_0) + \frac{\partial}{\partial v}(\mu \Delta_0) = 0 \tag{4}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\lambda \Delta_0 + R \int_{v=\text{const}} \Delta_0 \, du\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\mu \Delta_0 + R \int_{u=\text{const}} \Delta_0 \, dv\right] = 0.$$

Diese Bedingung können wir in der Form ausdrücken:

$$\lambda \Delta_0 + R \int_{v=\text{const}} \Delta_0 \, du = -\frac{\partial \Theta}{\partial v}, \quad \mu \Delta_0 + R \int_{u=\text{const}} \Delta_0 \, dv = \frac{\partial \Theta}{\partial u}, \tag{5}$$

wo Θ eine beliebige Funktion von u und v ist.

Durch die Bestimmung von λ und μ sind die Gleichungen der Mittelfläche des allgemeinsten K-Systems bekannt und mit diesen können alle Größen berechnet werden, die mit einem K-System zusammenhängen. Das K-System selbst wird dargestellt durch die Gleichungen [2 S. 129]

$$\xi = x_m + tX, \quad \eta = y_m + tY, \quad \zeta = z_m + tZ.$$

Bemerkung: Für $R = 0$ stellen zwar die Gleichungen (1a) nicht mehr eine Kugel dar, sondern einen Punkt. Doch behalten für diesen Fall die seitherigen Ausführungen Sinn und Gültigkeit. Soweit nichts anderes vermerkt wird, sollen darum auch im folgenden die Systeme zugelassen sein, die dem Wert $R = 0$ entsprechen.

§ 2.

Die wichtigsten Formeln des K-Systems bei speziellen Parametern.

Recht einfach werden unsere Formeln, wenn die Gaußische Kugel in Minimalparametern dargestellt wird. Wir setzen also [2 S. 144]

$$(6)\qquad X=\frac{u+v}{1+uv},\quad Y=\frac{i(v-u)}{1+uv},\quad Z=\frac{uv-1}{1+uv}$$

mit den Ableitungen

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u}=\frac{1-v^2}{(1+uv)^2}, & \frac{\partial Y}{\partial u}=\frac{-i(1+v^2)}{(1+uv)^2}, & \frac{\partial Z}{\partial u}=\frac{2v}{(1+uv)^2}, \\ \frac{\partial X}{\partial v}=\frac{1-u^2}{(1+uv)^2}, & \frac{\partial Y}{\partial v}=\frac{i(1+u^2)}{(1+uv)^2}, & \frac{\partial Z}{\partial v}=\frac{2u}{(1+uv)^2}. \end{cases}$$

Dann ist

$$(8)\quad \begin{cases} E_0=\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2=0, \quad F_0=\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right)=\frac{2}{(1+uv)^2}, \\ G_0=\sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2=0. \end{cases}$$

Aus (7) und (8) folgen noch die Beziehungen [2 S. 146]

$$(7a)\quad \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}=\frac{1}{F_0}\frac{\partial F_0}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u},\quad \frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v}=-F_0 X,\quad \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}=\frac{1}{F_0}\frac{\partial F_0}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}$$

und die entsprechenden für Y und Z. Ebenso ist

$$\sum\left(X\frac{\partial X}{\partial u}\right)=0,\quad \sum\left(X\frac{\partial X}{\partial v}\right)=0 \quad \text{wegen} \quad \sum(X^2)=1.$$

Die Bedingungen (5) lauten hier

$$\frac{2i}{(1+uv)^2}\lambda+2iR\int\limits_{v=\text{const}}\frac{du}{(1+uv)^2}=-\frac{\partial\Theta}{\partial v},$$

$$\frac{2i}{(1+uv)^2}\mu+2iR\int\limits_{u=\text{const}}\frac{dv}{(1+uv)^2}=\frac{\partial\Theta}{\partial u}.$$

Bei passender Wahl der Integrationskonstanten erhält man

$$\frac{2i}{(1+uv)^2}\lambda+2iR\frac{u}{1+uv}=-\frac{\partial\Theta}{\partial v},$$

$$\frac{2i}{(1+uv)^2}\mu+2iR\frac{v}{1+uv}=\frac{\partial\Theta}{\partial u}$$

oder

$$(9)\qquad \left|\begin{aligned} \lambda &= -uR(1+uv)+\frac{i}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial v}(1+uv)^2,\\ \mu &= -vR(1+uv)-\frac{i}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial u}(1+uv)^2. \end{aligned}\right.$$

Um reelle Punkte, Systemstrahlen usw. zu erhalten, müssen wegen (6) u und v konjugiert komplex sein, also auch die Funktionen λ und μ [wegen (7) und (1)], was nur möglich ist, wenn $\frac{\partial\Theta}{\partial v}$ und $\frac{\partial\Theta}{\partial u}$ konjugierte Funktionen sind.

Betrachten wir demnach für den Augenblick u und v als reelle Veränderliche, so läßt sich die Funktion $\Theta(u,v)$ in einen reellen und einen imaginären Teil zerlegen:

$$\Theta(u,v)=\varphi(u,v)+i\psi(u,v),$$

wobei dann $\varphi(u,v)$ und $\psi(u,v)$ symmetrisch in u und v ist. Darum kann jedem Ergebnis durch Vertauschen von u und v, $+i$ und $-i$ sofort ein konjugiertes an die Seite gesetzt werden, ein Mittel, von dem wir im folgenden häufig Gebrauch machen, ohne es immer ausdrücklich zu erwähnen.

II. Untersuchung besonderer Systeme.

§ 3.

Die Strahlensysteme $r^2-\varrho^2=$ konstant.

Für die Abszissen r der Grenzpunkte eines Strahls besteht nach (3) die Gleichung

$$r^2=\frac{1}{\Delta_0^2}\left[\frac{1}{4}(\overline{D}'+\overline{D}_1')^2-\overline{D}\,\overline{D}''\right]$$

und für die Abszissen ϱ der Brennpunkte [2 S. 139]

$$\varrho^2(E_0G_0-F_0^2)-\varrho[\overline{D}''E_0-(\overline{D}'+\overline{D}_1')F_0+\overline{D}G_0]+D\overline{D}''-\overline{D}'\overline{D}_1'=0,$$

in unserem Fall

$$(10)\qquad \varrho^2=\frac{1}{\Delta_0^2}(\overline{D}'\overline{D}_1'-\overline{D}\,\overline{D}'').$$

Somit ist

$$r^2 - \varrho^2 = \frac{1}{4\Delta_0^2}(\overline{D}' - \overline{D}_1')^2. \tag{11}$$

Wir suchen nun die Gleichungen der Strahlensysteme, für welche

$$r^2 - \varrho^2 = \varepsilon^2 = \text{konst.} \tag{12}$$

ist, oder nach (11)

$$(\overline{D}' - \overline{D}_1')^2 = (2\varepsilon\Delta_0)^2.$$

In obigen Parametern gibt dies die Gleichung

$$-\frac{\partial}{\partial v}(\mu F_0) + \frac{\partial}{\partial u}(\lambda F_0) = -2\varepsilon i F_0$$

oder nach (8) und (9)

$$-\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{2Rv}{1+uv} - i\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{2Ru}{1+uv} + i\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right) = \frac{-4i\varepsilon}{(1+uv)^2},$$

$$2i\frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{-4i\varepsilon}{(1+uv)^2}$$

oder

$$\Theta = -2\varepsilon\ln(1+uv) + iU(u) - iV(v), \tag{13}$$

wo $U = U(u)$ und $V = V(v)$ willkürliche, aber konjugierte Funktionen sind. Dadurch kennt man nach (9) λ und μ, also auch die Systeme selbst. Wir werden später darauf zurückkommen.

§ 4.
Formeln für die Normalensysteme und deren Orthogonalflächen.

Setzen wir $\varepsilon = 0$, so wird nach (12) und (11)

$$r = \varrho \text{ und } \overline{D}' = \overline{D}_1';$$

man erhält die Normalensysteme unserer Klasse. Für sie ist dann

$$\Theta = iU(u) - iV(v)$$

und daher nach (9)

$$\begin{cases} \lambda = -Ru(1+uv) + \frac{1}{2}V'(1+uv)^2, \\ \mu = -Rv(1+uv) + \frac{1}{2}U'(1+uv)^2, \end{cases} \tag{14}$$

wo U' und V' die Ableitungen von $U(u)$ bzw. $V(v)$ sind.

Hier ergibt sich nach (2)

$$\overline{D} = -\frac{\partial \mu}{\partial u} \cdot F_0 = \left[-Rv^2 + U' v(1+uv) + \frac{1}{2} U''(1+uv)^2 \right] \frac{-2}{(1+uv)^2},$$

$$\overline{D}'' = -\frac{\partial \lambda}{\partial v} \cdot F_0 = \left[-Ru^2 - V' u(1+uv) + \frac{1}{2} V''(1+uv)^2 \right] \frac{-2}{(1+uv)^2},$$

$$\overline{D}' = \overline{D}_1' = 0.$$

Die Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen lautet

$$\begin{vmatrix} \overline{D}\, du + \overline{D}' dv & \overline{D}_1' du + \overline{D}'' dv \\ E_0 du + F_0 dv & F_0 du + G_0 dv \end{vmatrix} = 0, \tag{15}$$

also für die K-Normalensysteme

$$F_0 (\overline{D} du^2 - \overline{D}'' dv^2) = 0 \tag{16}$$

und wegen $F_0 \neq 0$

$$\left[-Rv^2 + U' v(1+uv) + \frac{1}{2} U''(1+uv)^2 \right] du^2$$

$$- \left[-Ru^2 + V' u(1+uv) + \frac{1}{2} V''(1+uv)^2 \right] dv^2 = 0.$$

Diese Differentialgleichung bestimmt auch die Krümmungslinien auf den Orthogonalflächen und ihre sphärischen Bildkurven; sie liefert also auf der Bildkugel ein Orthogonalsystem.

Für die Abszisse t_1 eines Orthogonalflächenpunktes gilt [2 S. 133]

$$t_1 = -\int \left[\sum \left(X \frac{\partial x_m}{\partial u} \right) du + \sum \left(X \frac{\partial x_m}{\partial v} \right) dv \right].$$

Nun ist

$$-\frac{\partial t_1}{\partial u} = \sum \left(X \frac{\partial x_m}{\partial u} \right) = R \sum \left(X \frac{\partial X}{\partial u} \right) + \lambda \sum \left(X \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \right)$$

$$+ \mu \sum \left(X \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial u} \sum \left(X \frac{\partial X}{\partial u} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial u} \sum \left(X \frac{\partial X}{\partial v} \right),$$

$$-\frac{\partial t_1}{\partial u} = -\mu F_0 \sum (X^2) = -\mu F_0 \quad \text{nach (7 a)}$$

und entsprechend

$$-\frac{\partial t_1}{\partial v} = \sum\left(X\frac{\partial x_m}{\partial v}\right) = -\lambda F_0,$$

folglich

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} t_1 = \int\left[\left(U' - \dfrac{2vR}{1+uv}\right)du + \left(V' - \dfrac{2uR}{1+uv}\right)dv\right] \\ \quad = U(u) + V(v) - 2R\ln(1+uv). \end{array}\right.$$

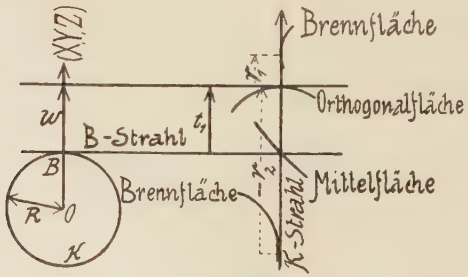
Für eine Orthogonalfläche erhält man demnach

$$x_1 = RX + \lambda\frac{\partial X}{\partial u} + \mu\frac{\partial X}{\partial v} + [U(u) + V(v) - 2R\ln(1+uv)]X$$

(y_1 und z_1 entsprechend.)

Sind X, Y, Z und W die Ebenenkoordinaten der Orthogonalfläche — W der Abstand der Tangentialebene (u, v) vom Ursprung — und sind r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien der Orthogonalfläche im Punkt (u, v), wo [mit 1 S. 91] $r_1 > 0$, wenn der zugehörige Krümmungsmittelpunkt von der Tangentialebene positiven Abstand hat, dann gilt offenbar

$$(18)\qquad R - \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = R + t_1 = W.$$



Werden durch die Gleichungen (6) und (18) die Ebenenkoordinaten X, Y, Z, W als Funktionen von u und v bestimmt, so lassen sich nach den allgemeinen Formeln für Ebenenkoordinaten wiederum die Fundamentalgrößen, Asymptotenlinien usw. für die Gesamtheit der Orthogonalflächen finden.

§ 5.
Rotationssysteme.

Gleichungen des allgemeinsten Rotationssystems.

Ein besonders durchsichtiger Aufbau ist bei den Drehsystemen zu erwarten. Wir wählen die z-Achse zur Drehachse der K-Systeme, ziehen aber hier den Minimalparametern die sogenannten Kugelkoordinaten vor. Ihre Bezeichnung sei φ und ψ statt u und v; dann wird

$$(19)\quad \begin{cases} X = \sin\varphi\cos\psi, & Y = \sin\varphi\sin\psi, & Z = \cos\varphi, \\ \dfrac{\partial X}{\partial\varphi} = \cos\varphi\cos\psi, & \dfrac{\partial Y}{\partial\varphi} = \cos\varphi\sin\psi, & \dfrac{\partial Z}{\partial\varphi} = -\sin\varphi, \\ \dfrac{\partial X}{\partial\psi} = -\sin\varphi\sin\psi, & \dfrac{\partial Y}{\partial\psi} = \sin\varphi\cos\psi, & \dfrac{\partial Z}{\partial\psi} = 0, \end{cases}$$

$$(0 \leqq \varphi \leqq \pi);$$

ferner

$$(20)\qquad E_0 = 1, \quad F_0 = 0, \quad G_0 = \sin^2\varphi, \quad \Delta_0 = \sin\varphi$$

und die Gleichungen der Mittelfläche lauten nach (1)

$$(21)\quad \begin{cases} x_m = R\sin\varphi\cos\psi + \lambda\cos\varphi\cos\psi - \mu\sin\varphi\sin\psi, \\ y_m = R\sin\varphi\sin\psi + \lambda\cos\varphi\sin\psi + \mu\sin\varphi\cos\psi, \\ z_m = R\cos\varphi - \lambda\sin\varphi. \end{cases}$$

Weil bei den Umdrehungskongruenzen z_m eine reine Funktion von φ sein muß, so gilt dies auch für λ:

$$\lambda = \lambda(\varphi).$$

Derselben Bedingung unterliegt

$$x_m^2 + y_m^2 = R^2\sin^2\varphi + \lambda^2\cos^2\varphi + \mu^2\sin^2\varphi + 2R\lambda\sin\varphi\cos\varphi;$$

also ist auch $\mu = \mu(\varphi)$ reine Funktion von φ.

Die Differentialgleichung (4) S. 5 lautet nun

$$2R\sin\varphi + \frac{\partial}{\partial\varphi}(\lambda\sin\varphi) + \frac{\partial}{\partial\psi}(\mu\sin\varphi) = 0$$

oder

$$2R\sin\varphi + \lambda'\sin\varphi + \lambda\cos\varphi = 0.$$

Wir erhalten als Lösung für die Rotationssysteme

$$\lambda = 2R \operatorname{ctg} \varphi - \frac{\varkappa}{\sin \varphi}, \quad (\varkappa \text{ ist Integrationskonstante})$$

$$\mu = \mu(\varphi) \text{ beliebig.}$$

Anmerkung: Bei Behandlung dieses Problems in Minimalparametern findet man, daß $v \frac{\partial \Theta}{\partial v}$ und $u \frac{\partial \Theta}{\partial u}$ Funktionen des Produkts (uv) sind.

Normalensysteme.

Für die Normalensysteme insbesondere ist

$$\overline{D}_1' - \overline{D}' = 0$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial v}(\lambda E_0) + \frac{\partial}{\partial v}(\mu F_0) - \frac{\partial}{\partial u}(\lambda F_0) - \frac{\partial}{\partial u}(\mu G_0) = 0,$$

bei unseren Parametern

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(\mu \sin^2 \varphi) = 0,$$

(22) $$\mu = \frac{\alpha}{\sin^2 \varphi} \quad (\alpha \text{ Integrationskonstante})$$

und nach oben

(23) $$\lambda = 2R \operatorname{ctg} \varphi - \frac{\varkappa}{\sin \varphi}.$$

Für die Abszissen t der Orthogonalflächenscharen erhält man

$$t = -\int \left\{ \sum \left(X \frac{\partial x_m}{\partial \varphi} \right) d\varphi + \sum \left(X \frac{\partial x_m}{\partial \psi} \right) d\psi \right\}$$

$$= -\int \left\{ \left[\lambda \sum \left(X \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2} \right) + \mu \sum \left(X \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi \, \partial \psi} \right) \right] d\varphi \right.$$

$$\left. + \left[\lambda \sum \left(X \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi \, \partial \psi} \right) + \mu \sum \left(X \frac{\partial^2 X}{\partial \psi^2} \right) \right] d\psi \right\}.$$

Denn es ist $\sum \left(X \frac{\partial X}{\partial \varphi} \right) = 0$ und $\sum \left(X \frac{\partial X}{\partial \psi} \right) = 0$.

Auch gilt für die Ableitungen

$$\sum\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)^2 + \sum\left(X\frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2}\right) = 0$$

$$\text{oder} \quad \sum\left(X\frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2}\right) = -E_0 = -1,$$

$$\sum\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\frac{\partial X}{\partial \psi}\right) + \sum\left(X\frac{\partial^2 X}{\partial \varphi\,\partial \psi}\right) = 0$$

$$\text{oder} \quad \sum\left(X\frac{\partial^2 X}{\partial \varphi\,\partial \psi}\right) = -F_0 = 0,$$

$$\sum\left(\frac{\partial X}{\partial \psi}\right)^2 + \sum\left(X\frac{\partial^2 X}{\partial \psi^2}\right) = 0$$

$$\text{oder} \quad \sum\left(X\frac{\partial^2 X}{\partial \psi^2}\right) = -G_0 = -\sin^2\varphi;$$

man erhält so

$$t = \int\left\{\left(2R\operatorname{ctg}\varphi - \frac{\varkappa}{\sin\varphi}\right)d\varphi + \alpha\, d\psi\right\},$$

$$t = 2R\ln\sin\varphi - \varkappa\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \alpha\psi + k \tag{24}$$

(k Integrationskonstante).

Nähere Untersuchung der K-Drehsysteme.

Wir untersuchen zunächst die Schar der Normalensysteme, für die $\alpha = 0$ ist, d. h.

$$\lambda = 2R\operatorname{ctg}\varphi - \frac{\varkappa}{\sin\varphi}, \quad \mu = 0.$$

Hier lauten die Gleichungen der Mittelfläche nach (21)

$$\begin{cases} x_m = \cos\psi\,(R\sin\varphi + 2R\operatorname{ctg}\varphi\cos\varphi - \varkappa\operatorname{ctg}\varphi), \\ y_m = \sin\psi\,(R\sin\varphi + 2R\operatorname{ctg}\varphi\cos\varphi - \varkappa\operatorname{ctg}\varphi), \\ z_m = \varkappa - R\cos\varphi. \end{cases} \tag{25}$$

Es verhält sich also

$$x_m : y_m = X : Y,$$

d. h. jeder Systemstrahl liegt mit dem zugehörigen Punkt B und mit der z-Achse in einer Ebene (s. Fig. S. 10); die Systemstrahlen liegen in den Meridianschnittebenen der Mittelfläche (die ja Drehfläche ist). Daraus folgt, daß auch die Orthogonalflächen der Rotationssysteme Drehflächen sind.

Zur Untersuchung der Meridianschnitte setzen wir $\sin\psi = 0$. Die Mittelflächen werden von der xz-Ebene in einer Kurvenschar geschnitten mit den Gleichungen

$$x = \pm (R\sin\varphi + 2R\operatorname{ctg}\varphi\cos\varphi - \varkappa\operatorname{ctg}\varphi),$$
$$z = \varkappa - R\cos\varphi.$$

Durch Elimination von φ erhält man die Gleichung der Schar in x und z:

$$x = \pm \frac{z^2 - \varkappa z + R^2}{\sqrt{(R+\varkappa-z)(R-\varkappa+z)}}. \tag{26}$$

Wie zu erwarten war, sind die Kurven symmetrisch zur z-Achse. Ersetzt man $\varkappa$ durch $-\varkappa$ und z durch $-z$, so bleibt die Gleichung erhalten, d. h.:

Die Mittelflächen für die Konstante $\varkappa = \varkappa_1$ und für $\varkappa = -\varkappa_1$ liegen symmetrisch zur xy-Ebene.

Der Wert des Radikanten im Nenner ist nur positiv für

$$\varkappa - R < z < \varkappa + R.$$

Die Kurve des Parameters $\varkappa$ liegt also in dem Streifen S mit der Breite $2R$, der von den zwei geraden Linien

$$z = \varkappa - R \quad \text{und} \quad z = \varkappa + R$$

begrenzt wird. Diese Geraden sind Asymptoten der Meridiankurve, weil hier der Nenner Null wird. Nur bei $\varkappa = \pm 2R$ wird für $z = \varkappa \mp R$ der Zähler auch Null. Die Meridiankurven mit $\varkappa = \pm 2R$ fordern daher eine besondere Untersuchung (s. u.).

Die Mitte zwischen dem Punkt P eines Strahls und dem zugehörigen Berührungspunkt B der Kugel K sei H.

Dann gilt für H

$$z = \frac{1}{2}(R\,Z + z_m) = \frac{1}{2}(R\cos\varphi + \varkappa - R\cos\varphi) = \frac{1}{2}\varkappa .$$

Die Ebene $z = \frac{1}{2}\varkappa$ halbiert die Strecke $B\,P$ jedes Systemstrahls.

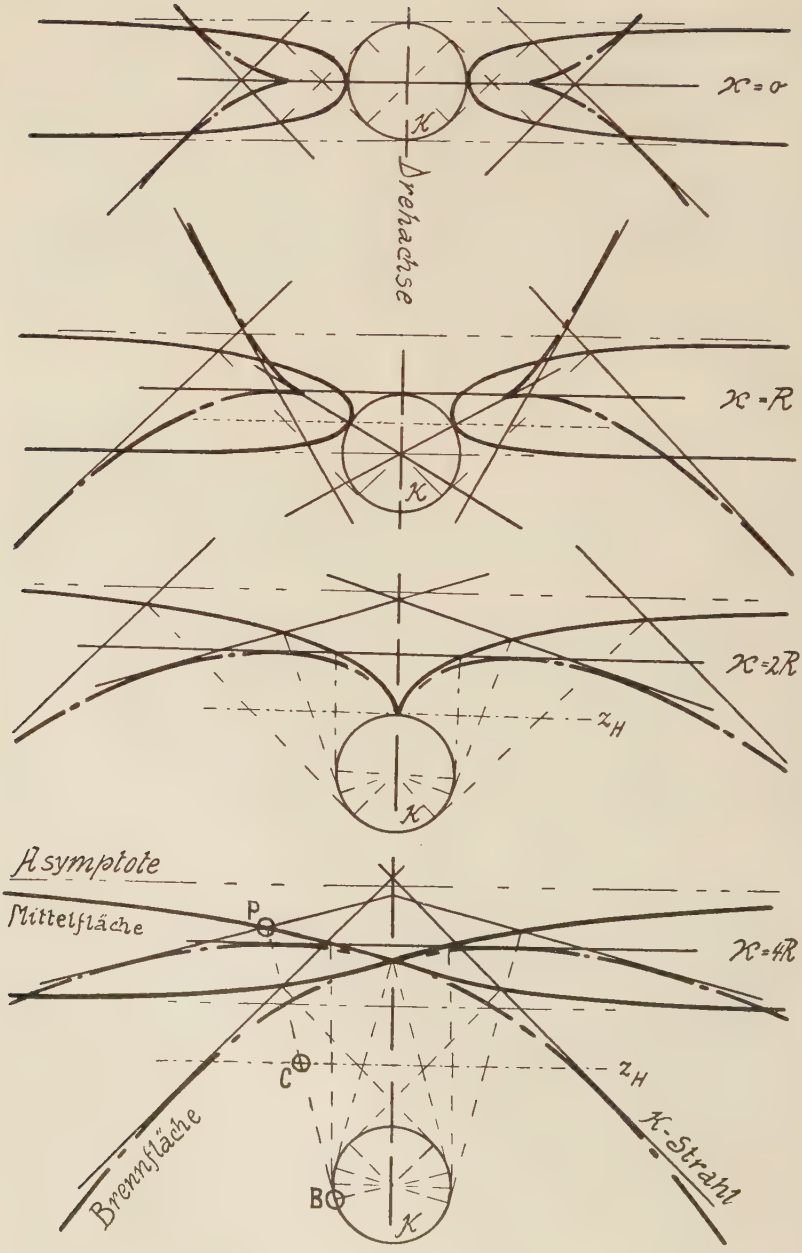
Diese Eigenschaft liefert ein einfaches Hilfsmittel, um den Meridian der Mittelfläche für ein bestimmtes $\varkappa$ punktweise zu zeichnen (vgl. Fig. S. 16): Man zieht an den Meridiankreis der Kugel K im beliebigen Punkt B die Tangente; sie schneidet die feste Gerade

$$z = \frac{1}{2}\varkappa, \quad y = 0$$

in einem Punkt C. Durch Verdoppeln von $B\,C$ über C hinaus erhält man als Endpunkt P einen Punkt der Mittelfläche. Das Lot auf $B\,P$ in P gibt den zugehörigen Systemstrahl. Wandert Punkt B auf dem Kreis, so wandert Punkt P auf dem Meridian der Mittelfläche. Da die z-Achse den einen ausgearteten Brennflächenmantel liefert, so ist auch der andere leicht konstruierbar. Denn die Mittelfläche halbiert das zwischen den Brennpunkten liegende Stück jedes Systemstrahls; der Meridian desselben wird außerdem von den K-Strahlen der Meridianebene umhüllt. Der für $|\varkappa| > 2R$ auftretende Knotenpunkt des Meridians liegt auf der z-Achse und ist deshalb auch gleichzeitig Durchdringungspunkt der zwei Brennflächen; die Systemstrahlen liegen dort in den Tangentialebenen der Mittelfläche. Aus der oben angegebenen Konstruktionsmethode ist ersichtlich, daß der Knotenpunkt $(\zeta, 0)$ derjenigen Hälfte des Streifens S angehört, welche der Kugel K näher liegt, und sich mit wachsender Entfernung des Streifens von der Kugel seiner Mitte asymptotisch annähert.

In analytischer Schreibweise: für $|\varkappa| > 2R$ ist

$$|\varkappa| - R < |\zeta| < |\varkappa| ,$$
$$|\varkappa - \zeta| = \zeta' < R ,$$
$$\zeta' \to 0, \quad \text{für } \varkappa \to \pm\infty .$$


x = 0
Drehachse
x = R
x = 2R
z_H
Asymptote
Mittelfläche
P
x = 4R
C
z_H
Brennfläche
x-Strahl
B

Zur Veranschaulichung sind die Zeichnungen beigegeben für

$$\varkappa = 0, R, 2R, 4R.$$

Bei dem Ausnahmefall $\varkappa = 2R$ lautet die Gleichung (26)

$$x^2 = \frac{(z-R)^4}{(3R-z)(z-R)}.$$

Aus der Zeichnung erkennt man leicht, daß der Faktor $(z-R)$ im Zähler und Nenner wegzulassen ist. Wollte man nämlich die Ebene $z - R = 0$ auch noch zur Mittelfläche rechnen, so würden zum K-System alle Strahlen parallel zur z-Achse hinzutreten; für diese wäre aber die Ebene $z - R = 0$ als Mittelfläche mit großer Willkür herausgegriffen. Vereinfachen wir deshalb die Gleichung mit $(z - R)$, so bleibt als Meridiankurve die Kissoide des Diokles

$$x^2(3R - z) = (z-R)^3.$$

(Andere Konstruktionsarten als die obige s. Loria, Ebene-Kurven Bd. 1 (1910) S. 37 ff.) Für $\varkappa = -2R$ erhält man — wie schon oben erwähnt — die in bezug auf die x-Achse symmetrisch liegende Kissoide.

Für $R = 0$ vereinfachen sich die Gleichungen ganz wesentlich. Es wird

$$z_m = \varkappa;$$

die Mittelfläche ist eine Ebene. Wir werden darauf später wieder zurückkommen.

Aus der Systemschar für $\mu = 0$ entstehen die übrigen Drehsysteme, wenn man die im Meridian $\psi = 0$ liegenden Strahlen unter Beibehaltung ihrer Richtung um das Stück

$$y_m\Big|_{\psi=0} = \mu(\varphi)\sin\varphi$$

senkrecht aus der Meridianebene herauszieht und dann die Strahlen um die z-Achse dreht. Dieses Stück der Verschiebung ist wegen der Funktion $\mu(\varphi)$ beliebig mit der Einschränkung, daß $\mu(\varphi)$ differenzierbar bleibt.

Bei den Normalensystemen mit $\mu \not\equiv 0$ sind die Orthogonal-

flächen keine Rotationsflächen mehr, weil hier die Strahlen nicht durch die Drehachse gehen. Eine Drehung um die Achse bewirkt also bei jeder Orthogonalfläche eine Änderung der Lage. Da aber mit den Rotationssystemen die Orthogonalflächenschar als Ganzes betrachtet unverändert bleiben muß, so erkennt man, daß während der Drehung jede ihrer Flächen der Reihe nach die Lage der übrigen einnimmt. Folglich sind die Orthogonalflächen untereinander kongruent. Nach einer vollständigen Umdrehung fällt jedoch jede wieder mit ihrer Ausgangsfläche zusammen. — Analytisch zeigt sich diese Umdrehung durch Vergrößerung des Winkels ψ um $\psi_0 = 2\pi$ [vgl. (25) S. 13]. Nach Gl. (24) wachsen aber dann die Abszissen t für die Punkte der Orthogonalflächen um $\psi_0 a = 2\pi a$: Jeder Systemstrahl durchbohrt dieselbe Orthogonalfläche in Abständen von der Größe $2\pi a$; jede Orthogonalfläche ist sich selbst parallel.

§ 6.

Ribaucour-Normalensysteme.

Wir verlassen die Drehsysteme und suchen nach den Ribaucour-Systemen. Dazu wählen wir wieder die Parameter u, v von § 2.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für ein Ribaucour-System ist die, daß die abwickelbaren Flächen auf der Mittelfläche ein konjugiertes System ausschneiden [4 S. 309].

Die Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen lautet allgemein nach (15)

$$(\bar{D} F_0 - \bar{D}_1' E_0)\, du^2 + (\bar{D} G_0 + \bar{D}' F_0 - \bar{D}_1' F_0 - \bar{D}'' E_0)\, du\, dv + (\bar{D}' G_0 - \bar{D}'' F_0)\, dv^2 = 0.$$

Die sich daraus ergebenden beiden Fortschreitungsrichtungen du_1, dv_1 und du_2, dv_2 sind aber konjugiert, wenn sie die Gleichung befriedigen [1 S. 106]

$$D\, du_1\, du_2 + D' (du_1\, dv_2 + dv_1\, du_2) + D''\, dv_1\, dv_2 = 0.$$

Dabei sind D, D', D'' die leicht zu errechnenden Fundamentalgrößen für die Mittelfläche. Die zwei vorhergehenden Gleichungen lassen sich zu einer Gleichung vereinigen:

$$D(\overline{D}' G_0 - \overline{D}'' F_0) - D'(\overline{D} G_0 + \overline{D}' F_0 - \overline{D}_1' F_0 - \overline{D}'' E_0) + D''(\overline{D} F_0 - \overline{D}_1' E_0) = 0.$$

Man könnte nun jedes fest gewählte K-System daraufhin betrachten, ob es diese Gleichung identisch erfüllt.

Eine allgemeine Untersuchung der K-Systeme führt auf eine umständliche Differentialgleichung, die nicht so leicht lösbar sein dürfte; in ihr treten die dritten partiellen Differentialquotienten der Funktion $\Theta(u, v)$ auf.

Es ist aber möglich, das allgemeinste K-System unter den Normalensystemen, das zugleich Ribaucour-System ist, samt erzeugender Fläche anzugeben. Bei einem Normalensystem liefern die abwickelbaren Flächen auf der Bildkugel ein Orthogonalsystem. Dies muß beim Ribaucour-System mit dem sphärischen Bild der Asymptotenlinien der erzeugenden Fläche zusammenfallen [4 S. 309]. Folglich ist die erzeugende Fläche eine Minimalfläche und diese Bildkurven sind isotherme Linien [4 S. 312].

Für die allgemeinste Minimalfläche gilt [2 S. 70]

$$(27)\quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{2}\int (1-u^2) F(u)\, du + \frac{1}{2}\int (1-v^2)\Phi(v)\, dv, \\ \eta = \frac{i}{2}\int (1+u^2) F(u)\, du - \frac{i}{2}\int (1+v^2)\Phi(v)\, dv, \\ \zeta = \int u F(u)\, du + \int v \Phi(v)\, dv. \end{cases}$$

Die Differentialgleichung für die Asymptotenlinien oder deren sphärische Bilder ist [2 S. 72]

$$F(u)\, du^2 + \Phi(v)\, dv^2 = 0.$$

Dabei wird die Bildkugel ebenfalls in den Minimalparametern u, v dargestellt, während für die abwickelbaren Flächen diese Differentialgleichung nach (16) in der Form erscheint

$$\overline{D}\, du^2 - \overline{D}''\, dv^2 = 0.$$

Die Minimalfläche (27) ist somit dann und nur dann erzeugende Fläche eines K-Normalensystems, wenn

$$\overline{D} : F(u) = -\overline{D}'' : \Phi(v)$$

ist, d. h. nach S. 9

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{U''}{F(u)} + 2v\,\frac{u\,U'' + U'}{F(u)} + v^2\,\frac{u^2\,U'' + 2u\,U' - 2R}{F(u)} \\ &\quad + \frac{V''}{\Phi(v)} + 2u\,\frac{v\,V'' + V'}{\Phi(v)} + u^2\,\frac{v^2\,V'' + 2v\,V' - 2R}{\Phi(v)} \end{aligned} \right\} = 0.$$

Die Differentialgleichung für die Asymptotenlinien der Minimalflächen läßt sich integrieren:

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} &e^{-i\frac{\pi}{4}} \int \sqrt{F(u)}\,du + e^{i\frac{\pi}{4}} \int \sqrt{\Phi(v)}\,dv - C_1 = 0, \\ &e^{i\frac{\pi}{4}} \int \sqrt{F(u)}\,du + e^{-i\frac{\pi}{4}} \int \sqrt{\Phi(v)}\,dv - C_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Dies sind dann auch die endlichen Gleichungen für die abwickelbaren Flächen der entsprechenden Ribaucour-Systeme und für die Krümmungslinien ihrer Orthogonalflächen.

Integration der Differentialgleichung.

Bei der folgenden Integration der Differentialgleichung (28) wird besonders zu beachten sein, daß für reelle Systeme sämtliche Funktionen paarweise konjugiert auftreten. Dabei sich einstellende reelle Konstanten werden mit griechischen (α, β, γ, ϱ), komplexe mit lateinischen (a, c, e, g, m) und die dazu konjugierten mit überstrichenen ($\overline{a}$, $\overline{c}$, $\overline{e}$, $\overline{g}$, $\overline{m}$) Buchstaben bezeichnet.

Leitet man die Bedingungsgleichung (28) zweimal nach u und zweimal nach v ab, so erhält man

$$2\left(\frac{u^2\,U'' + 2u\,U' - 2R}{F(u)}\right)'' + 2\left(\frac{v^2\,V'' + 2v\,V' - 2R}{\Phi(v)}\right)'' = 0.$$

Dies ist nur möglich, wenn die zwei Summanden Konstante sind. Für reelle Systeme sind sie konjugiert imaginär, und es wird

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{u^2\,U'' + 2u\,U' - 2R}{F(u)} = i\,a\,u^2 + a\,u + c, \quad \text{daher} \\ &\frac{v^2\,V'' + 2v\,V' - 2R}{\Phi(v)} = -i\,a\,v^2 + \overline{a}\,v + \overline{c}\,. \end{aligned} \right.$$

Bei Ableitung von (28) — dreimal nach u und einmal nach v — kommt

$$2\left(\frac{u\,U''+U'}{F(u)}\right)'''+2\,v\left(\frac{u^2\,U''+2\,u\,U'-2\,R}{F(u)}\right)'''=0.$$

Die Gleichung kann nur dann identisch erfüllt werden, wenn beide Summanden den Wert Null besitzen; also wird

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{u\,U''+U'}{F(u)}=e\,u^2+m\,u+g; & \text{entsprechend ist} \\ \dfrac{v\,V''+V'}{\Phi(v)}=\bar{e}\,v^2+\bar{m}\,v+\bar{g}. \end{cases}$$

Wegen (30) und (31) folgt aus Gleichung (28)

$$\left.\begin{array}{llll} \dfrac{U''}{F(u)}+\dfrac{V''}{\Phi(v)}+u^2v(2e+\bar{a})+uv(2m+2\bar{m})+v\cdot 2g+u^2v^2(ia-i\bar{a})+v^2c \\ \qquad\qquad +uv^2(2\bar{e}+a) \qquad\qquad +u\cdot 2\bar{g} \qquad\qquad +u^2\bar{c} \end{array}\right\}=0;$$

daher

$$(32)\qquad \begin{cases} a=-2\,\bar{e},\ \bar{a}=-2e;\ m+\bar{m}=0,\ \text{d. h.} \\ m=i\beta,\ \bar{m}=-i\beta \end{cases}$$

und

$$(28\,a)\quad \frac{U''}{F(u)}=-u^2\bar{c}-2\,u\,\bar{g}+i\gamma;\quad \frac{V''}{\Phi(v)}=-v^2c-2\,v\,g-i\gamma.$$

Setzt man in (30) für $\dfrac{u\,U''+U'}{F(u)}$ die Funktion $e\,u^2+m\,u+g$ [nach (31)], so entsteht nach (32) die Gleichung

$$(30\,a)\quad \frac{u\,U'-2\,R}{F(u)}=-u^3e+u^2(i\,a-i\beta)+u(-2\,\bar{e}-g)+c.$$

Wegen (32) folgt aus (31), (28 a) und (30 a) [(31) u — (28 a) u^2 — (30 a)]

$$(31\,a)\quad -\frac{2\,R}{F(u)}=u^4\bar{c}+u^3(2e+2\bar{g})+u^2i(2\beta-\alpha-\gamma)+u(2\bar{e}+2g)-c.$$

Die Gleichungen (28 a), (30 a) und (31 a) müssen noch auf ihre Verträglichkeit miteinander geprüft werden.

Ist

$$\underline{R\neq 0},$$

so wird

$$(33)\quad F(u)=\frac{2R}{u^4\bar{c}+u^3(2e+2\bar{g})+u^2 i(2\beta-\alpha-\gamma)+u(2\bar{e}+2g)-c}=\frac{2R}{N}$$

und aus (30a)

$$(34)\quad U'=\frac{u[u^3\bar{c}+u^2(e+2\bar{g})+ui(\beta-\gamma)+g]2R}{u[u^4\bar{c}+u^3(2e+2\bar{g})+u^2 i(2\beta-\alpha-\gamma)+u(2\bar{e}+2g)-c]}=\frac{2RZ_r}{N},$$

wegen (28a)

$$U''=\frac{(-u^2\bar{c}-u2\bar{g}+i\gamma)2R}{N}=\frac{d(U')}{du}=2R\frac{Z_r'N-N'Z_r}{N^2}.$$

Da N nicht identisch 0 ist, gibt dies die Bedingung

$$(35)\qquad (u^2\bar{c}+u2\bar{g}-i\gamma+Z_r')N=N'Z_r$$

oder ohne Abkürzung

$$\begin{aligned}&[u^2 4\bar{c}+u(2e+6\bar{g})+i(\beta-2\gamma)]\times\\&[u^4\bar{c}+u^3(2e+2\bar{g})+u^2 i(2\beta-\alpha-\gamma)+u(2\bar{e}+2g)-c]\\&\equiv[u^3 4\bar{c}+u^2(6e+6\bar{g})+ui(4\beta-2\alpha-2\gamma)+2\bar{e}+2g]\times\\&[u^3\bar{c}+u^2(e+2\bar{g})+ui(\beta-\gamma)+g].\end{aligned}$$

Die Koeffizienten gleich hoher Potenzen müssen einander gleich sein:

$$\left.\begin{aligned}u^6:&\quad 4\bar{c}^2=4\bar{c}^2,\\u^5:&\quad \bar{c}e(8+2)+\bar{c}\bar{g}(8+6)=\bar{c}e(4+6)+\bar{c}\bar{g}(8+6),\end{aligned}\right\}\ \text{(immer erfüllt)}$$

$$(36a)\quad \begin{cases}u^4:&\beta\bar{c}(8i+i)-\alpha\bar{c}4i+\gamma\bar{c}(-4i-2i)\\&\qquad+4e^2+e\bar{g}(12+4)+12\bar{g}^2\\=&\beta\bar{c}(4i+4i)-\alpha\bar{c}2i+\gamma\bar{c}(-4i-2i)\\&\qquad+6e^2+e\bar{g}(12+6)+12\bar{g}^2,\end{cases}$$

$$(37a)\quad \begin{cases}u^3:&8\bar{c}\bar{e}+8\bar{c}g+i\beta e(4+2)-2i\alpha e+i\gamma e(-2-4)\\&\qquad+i\beta\bar{g}(12+2)-6i\alpha\bar{g}+i\gamma\bar{g}(-6-4)\\=&2\bar{c}\bar{e}+(2+4)\bar{c}g+i\beta e(6+4)-2i\alpha e+i\gamma e(-6-2)\\&\qquad+i\beta\bar{g}(6+8)-4i\alpha\bar{g}+i\gamma\bar{g}(-6-4),\end{cases}$$

$$(38a)\quad \begin{cases}u^2:&-4c\bar{c}+4e\bar{e}+4eg+12\bar{e}\bar{g}+12g\bar{g}\\&\qquad-2\beta^2+\alpha\beta+\beta\gamma(1+4)-2\alpha\gamma-2\gamma^2\\=&2e\bar{e}+(6+2)eg+4\bar{e}\bar{g}+(4+6)g\bar{g}\\&\qquad-4\beta^2+2\alpha\beta+\beta\gamma(4+2)-2\alpha\gamma-2\gamma^2,\end{cases}$$

(39a) $\begin{cases} u: & -2ce-6c\bar{g}+2i\beta\bar{e}+2i\beta g-4i\gamma\bar{e}-4i\gamma g \\ & =2i\beta\bar{e}+(4+2)i\beta g-2i\gamma\bar{e}-(2+2)i\gamma g-2ia g, \end{cases}$

(40a) u^0: $\qquad -i\beta c+2i\gamma c=2\bar{e}g+2g^2.$

Besser zusammengefaßt lauten die Bedingungsgleichungen:

(36) $\qquad 2e(e+\bar{g})+\bar{c}(2ia-i\beta)=0,$

(37) $\qquad 6\bar{c}\bar{e}+2\bar{c}g-4i\beta e+2i\gamma e-2ia\bar{g}=0;$

ihr gleichwertig ist die konjugierte

($\overline{37}$) $\qquad 6ce+2c\bar{g}+4i\beta\bar{e}-2i\gamma\bar{e}+2iag=0,$

(38) $\quad 4eg-8\bar{e}\,\bar{g}-2g\bar{g}-2e\bar{e}+4c\bar{c}-2\beta^2+\alpha\beta+\beta\gamma=0,$

(39) $\qquad 2ce+6c\bar{g}+4i\beta g+2i\gamma\bar{e}-2iag=0,$

(40) $\qquad 2g(g+\bar{e})+c(i\beta-2i\gamma)=0.$

Die Differenz zwischen (38) und deren konjugierter Gleichung ist

$$12(eg-\bar{e}\,\bar{g})=0.$$

Setzt man

(41) $\begin{cases} e=\delta e^{i\varphi_0}, & \delta\geqq 0, \\ g=\varepsilon e^{-i\varphi_0}, & -\infty<\varepsilon<+\infty. \end{cases}$ so muß sein

Die Summe von (37) und (39) liefert

$$8c(e+\bar{g})+4i\beta(\bar{e}+g)=0.$$

Bei der Voraussetzung

$$\delta+\varepsilon\neq 0, \quad \text{d. h. } e+\bar{g}\neq 0$$

folgt

$$\frac{(\delta+\varepsilon)e^{i\varphi_0}}{(\delta+\varepsilon)e^{-i\varphi_0}}=-\frac{i\beta}{2c}.$$

Benützt man andere Konstanten und schreibt

(42) $\begin{cases} c=\varkappa e^{i\varphi_1}, & \text{so kann} \\ \varkappa=\dfrac{1}{2}\beta & \text{gewählt werden und es ist} \\ 2\varphi_0=-\left(\varphi_1+\dfrac{1}{2}\pi+2k\pi\right), & k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\cdots. \end{cases}$

Aus (36) kommt dann

$$2\delta(\delta+\varepsilon)e^{2i\varphi_0}+2\varkappa(\alpha-\varkappa)e^{i\left(2\varphi_0+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}=0,$$

also

$$\delta(\delta+\varepsilon)=\varkappa(\alpha-\varkappa), \tag{43}$$

entsprechend aus (40)

$$\varepsilon(\delta+\varepsilon)=\varkappa(\gamma-\varkappa). \tag{44}$$

Durch die Bedingungen (42) bis (44) werden schon alle obigen Gleichungen befriedigt:

Aus (37) folgt

$$[6\varkappa\delta+2\varkappa\varepsilon]e^{i(-\varphi_1-\varphi_0)}+e^{i\left(\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)}[-8\varkappa\delta+2\gamma\delta-2\alpha\varepsilon]=0$$

oder

$$e^{i\left(\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)}[2\delta(-\varkappa+\gamma)-2\varepsilon(-\varkappa+\alpha)]=0.$$

Wegen (43) und (44) hat aber die eckige Klammer den Wert 0. Die Gleichung (38)

$$-4\delta\varepsilon-2\varepsilon^2-2\delta^2+(4-8)\varkappa^2+2\alpha\varkappa+2\gamma\varkappa=0$$

ergibt die Summe von (43) und (44), nämlich

$$(\delta+\varepsilon)^2=\varkappa(\alpha+\gamma-2\varkappa).$$

Es ist auch [(43) — (44)]

$$(\delta-\varepsilon)(\delta+\varepsilon)=(\alpha-\gamma)\varkappa,$$

also

$$\delta+\varepsilon=\sqrt{\varkappa(\alpha+\gamma-2\varkappa)},\quad \delta-\varepsilon=(\alpha-\gamma)\sqrt{\frac{\varkappa}{\alpha+\gamma-2\varkappa}}\text{*)}$$

weshalb

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa(\alpha+\gamma-2\varkappa)}+\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sqrt{\frac{\varkappa}{\alpha+\gamma-2\varkappa}}=(\gamma-\varkappa)\sqrt{\frac{\varkappa}{\alpha+\gamma-2\varkappa}},$$

wo $\alpha+\gamma-2\varkappa\neq 0$ dasselbe Vorzeichen wie $\varkappa\neq 0$ haben muß.

*) Die Wurzeln sind zweiwertig.

Nach (34) erhält man daher Ribaucour-Systeme für

$$U' = 2R \times$$

$$\frac{u^3 \varkappa e^{i\left(2\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)} + u^2 e^{i\varphi_0}\left(\sqrt{\varkappa(\alpha+\gamma-2\varkappa)} + (\gamma-\varkappa)\sqrt{\frac{\varkappa}{\alpha+\gamma-2\varkappa}}\right) + ui(2\varkappa-\gamma) + (\gamma-\varkappa)\sqrt{\frac{\varkappa}{\alpha+\gamma-2\varkappa}}e^{-i\varphi_0}}{u^4 \varkappa e^{i\left(2\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)} + u^3 2\sqrt{\varkappa(\alpha+\gamma-2\varkappa)}e^{i\varphi_0} + u^2 i(4\varkappa-\alpha-\gamma) + u\, 2\sqrt{\varkappa(\alpha+\gamma-2\varkappa)}e^{-i\varphi_0} - \varkappa e^{-i\left(2\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)}}$$

(45 a) $$U' = 2R \frac{\left(iu\sqrt{\varkappa}\, e^{i\varphi_0} + \frac{\gamma-\varkappa}{\sqrt{\alpha+\gamma-2\varkappa}}\right)\left(\sqrt{\varkappa}\, u^2 e^{i\varphi_0} - ui\sqrt{\alpha+\gamma-2\varkappa} + \sqrt{\varkappa}\, e^{-i\varphi_0}\right)}{i\left[\sqrt{\varkappa}\, u^2 e^{i\varphi_0} - u\, i\sqrt{\alpha+\gamma-2\varkappa} + \sqrt{\varkappa}\, e^{-i\varphi_0}\right]^2};$$

dazu gehört nach (33)

(46 a) $$F(u) = \frac{2R}{i\left[\sqrt{\varkappa}\, u^2 e^{i\varphi_0} - u\, i\sqrt{\alpha+\gamma-2\varkappa} + \sqrt{\varkappa}\, e^{-i\varphi_0}\right]^2}.$$

Ist aber $e + \bar{g} = 0$, so wird aus (36), (40) und (38)

$$\bar{c}\, i(2\alpha - \beta) = 0, \qquad c\, i(\beta - 2\gamma) = 0,$$

$$0 \cdot e\bar{e} + 4 c\bar{c} + \beta(\alpha+\gamma-2\beta) = 0,$$

aus (39) oder (37)

$$ce \cdot 4 + 2i\bar{e}\,[2\beta - (\alpha+\gamma)] = 0.$$

Ist $c = \bar{c} = 0$, so muß sein

$$2\beta = \alpha+\gamma \text{ oder } \beta = 0,\ \bar{e} = 0.$$

Im ersten Fall wäre aber nach (33) $F(u)$ nicht definiert, also bleibt nur

$$\beta = 0, \quad \alpha+\gamma \neq 0 \quad \text{und} \quad e = \bar{g} = 0.$$

Hier wird

$$U' = \frac{-ui\gamma 2R}{-u^2 i(\alpha+\gamma)} = \frac{2R\gamma}{u(\alpha+\gamma)}, \text{ dazu } F(u) = -\frac{2R}{u^2 i(\alpha+\gamma)}.$$

Diese Werte ergeben sich aus (45 a) und (46 a) für den bisher ausgeschlossenen Fall $\varkappa = 0$.

Ist dagegen $e + \bar{g} = 0$, $c \neq 0$, also

$$\beta = 2\alpha = 2\gamma,$$

dann wird

$$4c\bar{c}=\beta^2.$$

Setzt man wie oben $c=\varkappa e^{i\varphi_1}$, so kann man wieder $\varkappa=\frac{1}{2}\beta$ wählen. Ferner ist

$$4ce=-2i\beta\bar{e},$$

folglich

$$4\varkappa\delta e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}=4\varkappa\delta e^{-i\left(\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)}$$

und deshalb

$$2\varphi_0=-\left(\varphi_1+\frac{\pi}{2}+2k\pi\right);$$

darum wird nach (34)

$$U'=2R\frac{u^3\varkappa e^{i\left(2\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)}-u^2\delta e^{i\varphi_0}+ui\varkappa-\delta e^{-i\varphi_0}}{u^4\varkappa e^{i\left(2\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)}+2u^2i\varkappa-\varkappa e^{-i\left(2\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)}}$$

$$=2R\frac{\left(\sqrt{\varkappa}uie^{i\varphi_0}-\frac{\delta}{\sqrt{\varkappa}}\right)\left(\sqrt{\varkappa}u^2e^{i\varphi_0}+\sqrt{\varkappa}e^{-i\varphi_0}\right)}{i\left[\sqrt{\varkappa}u^2e^{i\varphi_0}+\sqrt{\varkappa}e^{-i\varphi_0}\right]^2}$$

mit

$$F(u)=\frac{2R}{i\left[\sqrt{\varkappa}u^2e^{i\varphi_0}+\sqrt{\varkappa}e^{-i\varphi_0}\right]^2}.$$

Dadurch ist auch der Ausnahmefall $2\varkappa-(\alpha+\gamma)=0$, $\gamma=\varkappa$ erledigt, der in (45a) für U' einen unbestimmten Wert liefern würde. Man sieht leicht*), daß bei anderer neuer Benennung der Konstanten die Ribaucour-Systeme im Falle $R\neq 0$ bestimmt werden durch

$$(45)\qquad U'=\frac{2R(-p\bar{q}u+\delta)}{(pu+q)(-\bar{q}u+\bar{p})},\qquad V'=\frac{2R(-\bar{p}qv+\delta)}{(\bar{p}v+\bar{q})(-qv+p)}$$

*) Man setze in (45a):

$$\sqrt{|\varkappa|}\,e^{i\varphi_0}=ip\bar{q};\quad \sqrt{|\alpha+\gamma-2\varkappa|}=p\bar{p}-q\bar{q};\quad \frac{\gamma-\varkappa}{\sqrt{|\alpha+\gamma-2\varkappa|}}=\pm\delta.$$

mit

$$(46)\quad F(u)=\frac{2R\tau}{i(pu+q)^2(-\bar{q}u+\bar{p})^2},\quad \Phi(v)=\frac{2R\tau}{-i(\bar{p}v+\bar{q})^2(-qv+p)^2},$$
$$\tau=\pm 1.$$

Wesentlich rascher läßt sich der Fall

$$\underline{R=0}$$

erledigen. Nach (31a) wird hier

$$c=\bar{c}=0,\quad e=-\bar{g},\quad 2\beta-\alpha=\gamma.$$

Wir können neue Konstanten p und q einführen, so daß

$$e=-\bar{g}=ip\bar{q}$$

und

$$\alpha=\beta+p\bar{p}-q\bar{q}$$

wird. Dann ist nach (30a)

$$U'=F(u)[-ip\bar{q}u^2+iu(p\bar{p}-q\bar{q})+i\bar{p}q],$$
$$(47)\qquad U'=F(u)i(pu+q)(-\bar{q}u+\bar{p})$$

und nach (28a)

$$U''=F(u)[2uip\bar{q}+i(\beta-p\bar{p}+q\bar{q})]=\frac{dU'}{du},$$

d. h.

$$iF(u)[2up\bar{q}+\beta-p\bar{p}+q\bar{q}]=iF(u)(-2p\bar{q}u+p\bar{p}-q\bar{q})$$
$$+iF'(u)(pu+q)(-\bar{q}u+\bar{p}),$$

$$\frac{F'(u)}{F(u)}=\frac{4p\bar{q}u+\beta-2p\bar{p}+2q\bar{q}}{(pu+q)(-\bar{q}u+\bar{p})}$$

$$=-2\frac{-2p\bar{q}u+p\bar{p}-q\bar{q}}{(pu+q)(-\bar{q}u+\bar{p})}+\frac{\beta}{p\bar{p}+q\bar{q}}\left[\frac{p}{pu+q}-\frac{-\bar{q}}{-\bar{q}u+\bar{p}}\right].$$

Setzt man noch $\frac{\beta}{p\bar{p}+q\bar{q}}=\varepsilon$, so kommt durch Integration

$$(48)\qquad F(u)=c(pu+q)^{-2+\varepsilon}(-\bar{q}u+\bar{p})^{-2-\varepsilon}$$

(c Integrationskonstante), dazu nach (47)

$$(49)\qquad U'=ic(pu+q)^{-1+\varepsilon}(-\bar{q}u+\bar{p})^{-1-\varepsilon}.$$

Wird p und q gleichzeitig Null, so gilt diese Herleitung nicht mehr;

dann erhält man sofort nach (30a) $U' = 0$, und $F(u)$ ist nicht bestimmbar. Wie wir später sehen werden, artet hier die Mittelfläche zu einem Punkt aus, so daß von einem Ribaucour-System nicht mehr die Rede sein kann.

Vereinfachung des Ergebnisses.

Unser Ergebnis liefert aber nicht lauter völlig voneinander verschiedene Ribaucour-Systeme. Wir können die Werte $\varepsilon < 0$ sofort ausscheiden, weil man nach (49) für ε und $(-\varepsilon)$ dieselben Systemgruppen erhält. Ferner ist bei der Herleitung die Orientierung im Raum mit berücksichtigt. Durch geeignete Drehung müssen sich also die Systeme großenteils zur Deckung bringen lassen.

Alle Raumdrehungen um den Ursprung werden bewerkstelligt durch die Transformationsgleichungen [1 S. 158]

$$u = \frac{a u_1 + b}{-\bar{b} u_1 + \bar{a}} \text{ und die konjugierte } v = \frac{\bar{a} v_1 + \bar{b}}{-b v_1 + a}.$$

Durch Ableitung erhält man die Differentiale

$$du = \frac{a\bar{a} + b\bar{b}}{(-\bar{b} u_1 + \bar{a})^2} du_1, \quad dv = \frac{a\bar{a} + b\bar{b}}{(-b v_1 + a)^2} dv_1.$$

Die erzeugenden Minimalflächen unterliegen ebenfalls der Drehung, und das Linienelement einer solchen Fläche

$$ds^2 = (1 + uv)^2 F(u)\, \Phi(v)\, du\, dv$$

muß übergehen in

$$ds_1^2 = (1 + u_1 v_1)^2 F_1(u_1)\, \Phi_1(v_1)\, du_1\, dv_1.$$

Nun ist

$$F(u) = c(pu + q)^{-2+\varepsilon} (-\bar{q} u + \bar{p})^{-2-\varepsilon}, \tag{48}$$

also

$$ds^2 = (1 + uv)^2 c\bar{c} (pu + q)^{-2+\varepsilon} (-\bar{q} u + \bar{p})^{-2-\varepsilon} (\bar{p} v + \bar{q})^{-2+\varepsilon} (-qv + p)^{-2-\varepsilon} du\, dv.$$

Mit $a = s\bar{p}, \quad \bar{a} = \bar{s} p, \quad b = -\bar{s} q, \quad \bar{b} = -s\bar{q}$

erhält man für die neue Lage

$$ds_1^2=\left\{1+\frac{(s\bar{p}u_1-\bar{s}q)(\bar{s}pv_1-s\bar{q})}{(s\bar{q}u_1+\bar{s}p)(\bar{s}qv_1+s\bar{p})}\right\}^2 c\,\bar{c}\,\frac{[u_1(sp\bar{p}+sq\bar{q})]^{-2+\varepsilon}(\bar{s}q\bar{q}+\bar{s}p\bar{p})^{-2-\varepsilon}}{(s\bar{q}u_1+\bar{s}p)^{-4}}\times$$

$$\times\frac{[v_1(\bar{s}p\bar{p}+\bar{s}q\bar{q})]^{-2+\varepsilon}(sq\bar{q}+sp\bar{p})^{-2-\varepsilon}}{(\bar{s}qv_1+s\bar{p})^{-4}}\cdot\frac{(s\bar{s})^2(p\bar{p}+q\bar{q})^2\,du_1\,dv_1}{(s\bar{q}u+\bar{s}p)^2(\bar{s}qv_1+s\bar{p})^2}$$

$$=\{1+u_1v_1\}^2\,\frac{\{s\bar{s}(p\bar{p}+q\bar{q})\}^2 c\,\bar{c}}{\{s\bar{q}u_1+\bar{s}p\}^2\{\bar{s}qv_1+s\bar{p}\}^2}\cdot\frac{s^{-2+\varepsilon}\bar{s}^{-2-\varepsilon}(p\bar{p}+q\bar{q})^{-4}u_1^{-2+\varepsilon}}{(s\bar{q}u_1+\bar{s}p)^{-2}}\times$$

$$\times\frac{\bar{s}^{-2+\varepsilon}s^{-2-\varepsilon}(p\bar{p}+q\bar{q})^{-4}v_1^{-2+\varepsilon}}{(\bar{s}qv_1+s\bar{p})^{-2}}\cdot(s\bar{s})^2(p\bar{p}+q\bar{q})^2du_1\,dv_1.$$

Folglich wird

$$F_1(u_1)=c(p\bar{p}+q\bar{q})^{-2}\left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^{\varepsilon}u_1^{-2+\varepsilon}e^{i\alpha},\quad \varepsilon\geqq 0.$$

Der Wert $e^{i\alpha}$ ist nicht näher bekannt. Für $\varepsilon=0$ sind die assoziierten Minimalflächen unter sich verschieden, man kann sie also nicht durch eine Drehung ineinander überführen. Darum sind auch die Systeme mit

$$U'=\frac{A}{u},\quad F(u)=\frac{iA\gamma}{u^2},\quad \gamma \text{ reell, } A \text{ komplex,} \tag{50}$$

im Fall $R=0$ unter sich verschiedene Ribaucour-Systeme. Bei $R>0$ aber fallen die Systeme mit komplexem A nicht unter die Ribaucour-Systeme [vgl. (45/46)]. Das allgemeinste Ribaucour-Normalensystem ist hier gegeben durch die Formeln

$$F(u)=\frac{2R\tau}{i(p\bar{p}u)^2}=\frac{i\alpha}{u^2},\quad U'=\frac{2R\delta}{p\bar{p}u}. \tag{51}$$

Bei $R=0$ erhält man für $\varepsilon\neq 0$ weitere Lösungen. Jetzt sind aber die assoziierten Minimalflächen unter sich kongruent — damit ebenso die erzeugten Ribaucour-Systeme — und lassen sich durch Drehung um die z-Achse ineinander überführen [4 S. 379/80]. Durch geeignete Wahl von s erscheint darum $F_1(u_1)$ mit einer rein imaginären Konstanten. Für $R=0$ erhält man also das allgemeinste Ribaucour-System entweder aus (50) oder aus

$$F(u)=i\gamma u^{\varepsilon-2},\quad U'=\delta u^{\varepsilon-1},\quad \varepsilon>0,\quad \gamma,\delta\neq 0,\quad \text{reell.} \tag{52}$$

In jedem Fall ist die erzeugende Minimalfläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar.

Untersuchung der Ribaucour-Normalensysteme für $R \neq 0$.

Nun haben wir aber eine Schar von K-Systemen kennen gelernt, deren Strahlen die Normalen von Drehflächen darstellen (25). Solche Systeme sind immer Ribaucour-Systeme, welche als erzeugende Flächen die Wendelflächen haben. In der Tat läßt sich zeigen, daß die dort behandelten Strahlensysteme mit

$$\lambda = 2R \operatorname{ctg} \varphi - \frac{\varkappa}{\sin \varphi}, \quad \mu = 0$$

identisch sind mit den Ribaucour-Systemen (51)

$$U' = \frac{2R\delta}{p\bar{p}u} = \frac{\varkappa + 2R}{2u}, \quad V' = \frac{2R\delta}{p\bar{p}v} = \frac{\varkappa + 2R}{2v}.$$

Bei $R \neq 0$ sind das die einzigen Ribaucour-Normalensysteme. Für diese ist nach (14)

$$\begin{aligned}\lambda &= -Ru(1+uv) + \frac{1}{2} V'(1+uv)^2 \\ &= -Ru(1+uv) + \frac{1}{4v}(\varkappa + 2R)(1+uv)^2, \\ \mu &= -Rv(1+uv) + \frac{1}{2} U'(1+uv)^2 \\ &= -Rv(1+uv) + \frac{1}{4u}(\varkappa + 2R)(1+uv)^2.\end{aligned}$$

Die Mittelflächen haben dann nach (1) und (6) die Gleichungen

$$\begin{aligned}x_m &= R\frac{u+v}{1+uv} + \frac{1}{1+uv}[-Ru(1-v^2) - Rv(1-u^2)] \\ &\qquad + \frac{\varkappa + 2R}{4uv}[u(1-v^2) + v(1-u^2)] \\ &= R\frac{u+v}{1+uv} - \frac{(u+v)R}{1+uv}(1-uv) + \frac{\varkappa + 2R}{4uv}(u+v)(1-uv),\end{aligned}$$

$$y_m = iR\frac{v-u}{1+uv} + \frac{i}{1+uv}[Ru(1+v^2) - Rv(1+u^2)]$$
$$+ i\frac{\varkappa+2R}{4uv}[-u(1+v^2)+v(1+u^2)]$$
$$= iR\frac{v-u}{1+uv} - iR\frac{v-u}{1+uv}(1-uv) + i\frac{\varkappa+2R}{4uv}(v-u)(1-uv),$$
$$z_m = R\frac{uv-1}{1+uv} - \frac{4Ruv}{1+uv} + \varkappa + 2R$$
$$= \varkappa - R\frac{uv-1}{1+uv}.$$

Wir substituieren

(53) $$u = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}e^{i\psi}, \qquad v = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}e^{-i\psi},$$

also

$$1+uv = \frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}, \qquad 1-uv = -\frac{\cos\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Dann wird nach leichten Umformungen

$$x_m = \cos\psi\,(R\sin\varphi + 2R\operatorname{ctg}\varphi\cos\varphi - \varkappa\operatorname{ctg}\varphi),$$
$$y_m = \sin\psi\,(R\sin\varphi + 2R\operatorname{ctg}\varphi\cos\varphi - \varkappa\operatorname{ctg}\varphi),$$
$$z_m = \varkappa - R\cos\varphi.$$

Das sind aber die Gleichungen (25).

Die erzeugenden Wendelflächen sind nach (51) durch

$$F(u) = \frac{ia}{u^2}, \qquad \Phi(v) = -\frac{ia}{v^2}$$

bestimmt und haben die Gleichungen [2 S. 70]

$$x = \frac{ai}{2}\left[\int\left(\frac{1}{u^2}-1\right)du - \int\left(\frac{1}{v^2}-1\right)dv\right] = \frac{ai}{2}(v-u)\frac{-1+uv}{uv} + c_1,$$
$$y = -\frac{a}{2}\left[\int\left(\frac{1}{u^2}+1\right)du + \int\left(\frac{1}{v^2}+1\right)dv\right] = \frac{a}{2}(u+v)\frac{-uv+1}{uv} + c_2,$$
$$z = ai\left[\int\frac{du}{u} - \int\frac{dv}{v}\right] = ai\ln\frac{u}{v} + c_3.$$

Durch unsere Substitution (53) wird dann

$$x = 2\,a\,\operatorname{ctg}\varphi \sin\psi + c_1 = 2\,a\,\operatorname{ctg}\varphi \cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) + c_1,$$

$$y = -2\,a\,\operatorname{ctg}\varphi \cos\psi + c_2 = 2\,a\,\operatorname{ctg}\varphi \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) + c_2,$$

$$z = c_3 - a\,(2\,\psi + 2\,k\pi) = c - 2\,a\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Den Parallelkreisen (Krümmungslinien) der Mittelfläche entsprechen durch Orthogonalität die Schraubenlinien (Asymptotenlinien). Diese sind rechtsgängig für $a<0$, linksgängig für $a>0$.

Den Meridianen $\psi = \text{konst.}$ entsprechen die dazu um 90^0 verschobenen Wendelgeraden $\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = \text{konst.}$ Für $a<0$ nimmt bei wachsendem ψ der Abstand z der Wendelgerade von der xy-Ebene zu, für $a>0$ nimmt er ab.

III. *B*-Strahlensysteme.

Vor dem Übergang zu den speziellen Untersuchungen der K-Systeme, für die $R=0$ ist, soll noch das allgemeinste K-System, $R \neq 0$, gesucht werden, für das die B-Strahlen ein W-System liefern. Mit dem Namen B-Strahlen haben wir die Strahlen belegt, welche die Mittelpunkte P mit den zugehörigen Punkten B auf der Kugel K verbinden.

Differentialgleichung für das allgemeinste von B-Strahlen gebildete W-System.

Für jedes B-Strahlensystem ist die Kugel K, $R \neq 0$, ein Brennflächenmantel. Dies ist daher dann und nur dann ein W-System, wenn es eine unendlich kleine Verbiegung der Kugel K von der Art gibt, daß die Richtung eines B-Strahls und die Verschiebung des Berührungspunktes B aufeinander senkrecht stehen [4 S. 322]. Nun ist die allgemeinste unendlich kleine Verbiegung der Kugel bestimmt durch [5 S. 157]

$$x = \xi + \zeta_0 Y - \eta_0 Z,$$
$$y = \eta + \xi_0 Z - \zeta_0 X,$$
$$z = \zeta + \eta_0 X - \xi_0 Y,$$

(ξ, η, ζ): Koordinaten einer Minimalfläche; (ξ_0, η_0, ζ_0): diejenigen der dazu adjungierten Minimalfläche.

Das allgemeinste W-System der Klasse erhält man also durch die Bedingung

$$\sum (\xi + \zeta_0 Y - \eta_0 Z)\left(\lambda \frac{\partial X}{\partial u} + \mu \frac{\partial X}{\partial v}\right) = 0$$

oder

$$\lambda \sum \left(\xi \frac{\partial X}{\partial u}\right) + \mu \sum \left(\xi \frac{\partial X}{\partial v}\right) + \lambda \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ X & Y & Z \\ \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ X & Y & Z \\ \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Bei den Minimalparametern u, v der Minimalflächen gelten aber die Gleichungen [2 S. 148]

$$Z \frac{\partial Y}{\partial u} - Y \frac{\partial Z}{\partial u} = i \frac{\partial X}{\partial u}, \quad Z \frac{\partial Y}{\partial v} - Y \frac{\partial Z}{\partial v} = -i \frac{\partial X}{\partial v}$$

und die übrigen, welche durch zyklische Vertauschung von X, Y, Z entstehen. So erhält man

$$\lambda \sum \left[(\xi + i\xi_0) \frac{\partial X}{\partial u}\right] + \mu \sum \left[(\xi - i\xi_0) \frac{\partial X}{\partial v}\right] = 0.$$

Nach (27) S. 19 ist

$$\xi = \frac{1}{2} \int (1 - u^2) F(u) \, du + \frac{1}{2} \int (1 - v^2) \Phi(v) \, dv,$$

und daher [2 S. 79]

$$\xi + i\xi_0 = \int (1 - v^2) \Phi(v) \, dv + \bar{c}_1$$
$$= (1 - v^2) \varphi''(v) + 2v\varphi'(v) - 2\varphi(v) + \bar{c}_1 = V_1 + \bar{c}_1,$$

wo $\varphi'''(v) = \Phi(v)$ gesetzt wurde [2 S. 71], ebenso

$\xi - i\xi_0 = \int (1 - u^2) F(u) \, du + c_1$, ($c_1$, $\bar{c}_1$ konjugierte Konstante).

Setzt man $F(u) = f'''(u)$, so wird in Rücksicht auf diese und die entsprechenden Formeln für η, η_0 und ζ, ζ_0 die Bedingungs-

gleichung [nach 2 S. 71] umgeformt zu

$$\lambda\begin{Vmatrix} \frac{1-v^2}{(1+uv)^2}[(1-v^2)\varphi''(v)+2v\varphi'(v)-2\varphi(v)+\bar{c}_1] \\ \frac{i^2(1+v^2)}{(1+uv)^2}[(1+v^2)\varphi''(v)-2v\varphi'(v)+2\varphi(v)+\bar{c}_2] \\ \frac{2v}{(1+uv)^2}[2v\varphi''(v)-2\varphi'(v)+\bar{c}_3] \end{Vmatrix}$$

$$+\mu\begin{Vmatrix} \frac{1-u^2}{(1+uv)^2}[(1-u^2)f''(u)+2uf'(u)-2f(u)+c_1] \\ \frac{i^2(1+u^2)}{(1+uv)^2}[(1+u^2)f''(u)-2uf'(u)+2f(u)+c_2] \\ \frac{2u}{(1+uv)^2}[2uf''(u)-2f'(u)+c_3] \end{Vmatrix}=0$$

oder

$$\lambda\frac{-4\varphi(v)+\bar{c}_1-\bar{c}_2+2v\bar{c}_3-(\bar{c}_1+\bar{c}_2)v^2}{(1+uv)^2}$$

$$+\mu\frac{-4f(u)+c_1-c_2+2uc_3-(c_1+c_2)u^2}{(1+uv)^2}=0.$$

Das allgemeinste W-System erhält man also aus der Bedingung

$$\frac{\lambda}{\mu}=-\frac{g(u)}{h(v)}, \tag{54}$$

[$g(u), h(v)$ willkürliche konjugierte Funktionen].

Die zugehörigen unendlich kleinen Verbiegungen sind durch die Funktionen $F(u)=\gamma g'''(u)$, $\Phi(v)=\gamma h'''(v)$ festgelegt (γ Konstante).

Folgerungen.

Beim Einsetzen der Werte für λ und μ aus (9) in (54) entsteht die lineare Differentialgleichung

$$h(v)\left[i\frac{\partial\Theta}{\partial v}-\frac{2uR}{1+uv}\right]+g(u)\left[-i\frac{\partial\Theta}{\partial u}-\frac{2vR}{1+uv}\right]=0. \tag{55}$$

Zur Integration verwendet man das simultane System

$$\frac{i\,du}{g(u)(1+uv)}=\frac{-i\,dv}{h(v)(1+uv)}=\frac{d\Theta}{2R[uh(v)+vg(u)]}.$$

Aus der allgemeinen Lösung sind dann die Funktionen $\Theta(u, v)$ auszuwählen, deren Ableitungen $\frac{\partial \Theta}{\partial u}$ und $\frac{\partial \Theta}{\partial v}$ konjugiert sind

Es soll noch untersucht werden, welche K-Normalensysteme zu den W-Systemen beitragen. Für sie gilt (s. S. 8)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} = i\,U', \quad \frac{\partial \Theta}{\partial v} = -i\,V'.$$

Aus (55) folgt also

(56) $V'h(v) + U'g(u) + u(v\,V' - 2R)h(v) + v(u\,U' - 2R)g(u) = 0.$

Beim Ableiten nach u und darauf nach v erhält man

$$[\underbrace{(v\,V' - 2R)h(v)}_{-i\alpha}]' + [\underbrace{(u\,U' - 2R)g(u)}_{+i\alpha}]' = 0,$$

(57) $(u\,U' - 2R)g(u) = i\alpha u + a, \quad (v\,V' - 2R)h(v) = -i\alpha v + \bar{a}$

(α reelle, a, $\bar{a}$ konjugiert komplexe Konstante).

Demnach wird aus (56)

$$U'g(u) + V'h(v) + av + \bar{a}u = 0,$$

also

$$U'g(u) = -\bar{a}u + i\beta \quad (\beta \text{ reell}),$$

weshalb nach (57)

$$2Rg(u) = -\bar{a}u^2 + ui(\beta - \alpha) - a;$$

daher

$$F(u) = \gamma\,g'''(u) = 0;$$

die Minimalfläche (ξ, η, ζ) ist ein Punkt. Es wird

$$U' = \frac{2R(\bar{a}u - i\beta)}{\bar{a}u^2 + ui(\alpha - \beta) + a} \quad \text{und} \quad V' = \frac{2R(av + i\beta)}{av^2 - vi(\alpha - \beta) + \bar{a}}.$$

Multipliziert man den Nenner von Formel (45) aus und erweitert mit i, so sieht man, daß sie, abgesehen von der Bezeichnung der Konstanten, mit obiger Formel übereinstimmt, d. h. die B-Strahlen eines K-Normalensystems, $R \neq 0$, liefern dann und nur dann ein W-System, wenn die Orthogonalflächen des K-Normalensystems Drehflächen sind. Hier ist das B-Strahlensystem ebenfalls ein Drehsystem. Nun ist jedes Drehsystem, dessen eine Brennfläche die Drehachse ist, ein W-System. Denn jeder Systemstrahl ist

hier Tangente an einen Meridian der nicht ausgearteten Brennfläche. Bei einer unendlich kleinen Drehung derselben um ihre Achse steht daher jeder Strahl senkrecht auf der Verschiebung seines Berührungspunktes, und die Drehung läßt sich als unendlich kleine Verbiegung der Brennfläche auffassen.

Es gibt also außer diesem trivialen Fall keine W-Systeme unter den B-Strahlensystemen, welche Normalensysteme als zugehörige K-Systeme besitzen.

IV. K-Systeme, für die $R=0$ ist.

Im folgenden Abschnitt sollen die K-Systeme im besonderen betrachtet werden, für welche der Radius der Kugel K Null geworden ist, deren Mitteleinhüllende also aus einem einzigen Punkt O besteht. Ein Punkt läßt sich aber auch als ausgeartete Minimalfläche, $F(u) \equiv 0$, auffassen. Nun sind in der Arbeit des Herrn K. Kommerell, „Strahlensysteme und Minimalflächen“ [5], diejenigen Systeme untersucht, für welche die Mittelenveloppe eine Minimalfläche ist. Wir werden darum bei unseren Systemen vielfach solche Eigenschaften und Ergebnisse vorfinden, welche für die Strahlensysteme mit einer Minimalfläche als Mitteleinhüllenden bezeichnend sind.

§ 7.
Isotrope Systeme.

So treten für $R=0$ isotrope Systeme auf. Wenn wir die Mittelfläche der Systeme als Leitfläche wählen, lauten die Bedingungsgleichungen [nach 2 S. 144]

$$\overline{D}=0, \quad \overline{D}''=0, \quad \overline{D}'+\overline{D}_1'=0.$$

Daraus folgt nach (2) bei den Minimalparametern u, v [1])

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v}=0 \quad \text{oder} \quad \lambda=\lambda(u),$$

[1]) Die Differentialgleichungen für die isotropen Systeme lassen sich auch mit den Kugelparametern φ und ψ behandeln; man erhält

$$\lambda=A\cos\psi+B\sin\psi; \quad \mu=-\operatorname{ctg}\varphi(A\sin\psi-B\cos\psi)+c.$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = 0 \quad \text{oder} \quad \mu = \mu(v),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\lambda F_0) + \frac{\partial}{\partial v}(\mu F_0) = 0 \text{ oder mit } F_0 = \frac{2}{(1+uv)^2}:$$

$$2\,\frac{\lambda'(u)(1+uv) - 2v\lambda(u)}{(1+uv)^3} + 2\,\frac{\mu'(v)(1+uv) - 2u\mu(v)}{(1+uv)^3} = 0,$$

$$\mu'(v) + \lambda'(u) + u[v\mu'(v) - 2\mu(v)] + v[u\lambda'(u) - 2\lambda(u)] = 0.$$

Genau wie bei (56) sieht man, daß diese Gleichung nur erfüllbar ist, wenn

(58) $$u\lambda'(u) - 2\lambda(u) = iau + a$$

ist und $$\lambda'(u) = -\bar{a}u + i\beta$$

oder $$2\lambda(u) = -\bar{a}u^2 + 2i\beta u + c$$

und nach (58)

$$2\lambda(u) = u\lambda'(u) - iau - a = -\bar{a}u^2 + i(\beta - a)u - a,$$

in andern Konstanten (A, $\bar{A}$ konjugiert, a reell)

$$\lambda(u) = Au^2 + iau + \bar{A}, \quad \mu(v) = \bar{A}v^2 - iav + A,$$

daher nach (9)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} = \frac{2i(\bar{A}v^2 - iav + A)}{(1+uv)^2}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial v} = \frac{-2i(Au^2 + iau + \bar{A})}{(1+uv)^2}.$$

Für ein Normalensystem nimmt nach S. 8 Θ die Form

$$\Theta = iU(u) - iV(v)$$

an; dann muß $A = 0$ und $a = 0$ sein; es wird

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0.$$

Das isotrope Normalensystem besteht aus den Ursprungsstrahlen mit den Kugeln um O als Orthogonalflächenschar.

Die Gleichungen für die Mittelfläche eines isotropen K-Systems sind nach (1)

$$x_m = \frac{(1-v^2)(Au^2 + iau + \bar{A}) + (1-u^2)(\bar{A}v^2 - iav + A)}{(1+uv)^2}$$

$$= \frac{i(-a)(v-u) - (uv-1)(A+\bar{A})}{1+uv},$$

$$y_m = \frac{-i(1+v^2)(Au^2+i\alpha u+\bar{A})+i(1+u^2)(\bar{A}v^2-i\alpha v+A)}{(1+uv)^2}$$
$$= \frac{i(\bar{A}-A)(uv-1)-(-\alpha)(u+v)}{1+uv},$$

$$z_m = \frac{2v(Au^2+i\alpha u+\bar{A})+2u(\bar{A}v^2-i\alpha v+A)}{(1+uv)^2}$$
$$= \frac{(A+\bar{A})(u+v)-i(\bar{A}-A)i(v-u)}{1+uv},$$

Wie zu erwarten ist, werden diese Systeme durch die Formeln für isotrope Systeme in [5] S. 157

$$x_m = \xi+\zeta_0 Y-\eta_0 Z \text{ usw.}$$

nach der allgemeinen Regel dargestellt, wenn $\xi=\eta=\zeta=0$ gesetzt wird und ξ_0, η_0, ζ_0 beliebige reelle Konstante sind.

$[\xi_0 = i(A-A)$, $\eta_0 = A+\bar{A}$, $\zeta_0 = -\alpha]$ [5 S. 156 Satz].

Man sieht leicht, daß die Gleichung besteht

$$x_m i(\bar{A}-A)+y_m(A+\bar{A})+z_m(-\alpha)=0;$$

denn beim Einsetzen der Werte von x_m, y_m, z_m heben sich die Summanden paarweise auf. Die Mittelflächen sind hier also eben; diese Ebenen gehen durch den Ursprung O. (Doch kann auch die Mittelfläche zum Punkt $x_m=0$, $y_m=0$, $z_m=0$ ausarten.)

Umgekehrt gilt: Die isotropen Strahlensysteme, die eine Ebene als Mittelfläche besitzen, haben als Mitteleinhüllende einen Punkt, sind also im wesentlichen diese Systeme; denn die Differentialgleichung für die Asymptotenlinien der Mittelfläche eines isotropen Systems [5 S. 159]

$$F(u)\,du^2+\Phi(v)\,dv^2=0$$

muß hier für alle Kurven der Mittelfläche erfüllt sein; das ist nur der Fall, wenn $F(u)\equiv 0$, $\Phi(v)\equiv 0$ ist; $F(u)$ und $\Phi(v)$ sind aber die Funktionen, welche die von den Mittelebenen umhüllte Minimalfläche festlegen; für $F(u)=0$, $\Phi(v)=0$ ist dies ein Punkt.

Zur weiteren Untersuchung der isotropen Systeme legen wir die Orientierung im Raum so fest, daß $A=\bar{A}=0$ wird, d. h.,

daß die Gleichung der ebenen Mittelfläche die Form annimmt

$$z_m = 0;$$

dann ist

$$x_m = \frac{-a\,i\,(v-u)}{1+uv} = -a\,Y, \quad y_m = \frac{a\,(u+v)}{1+uv} = a\,X.$$

Der kürzeste Abstand $\overline{OP}$ des K-Strahls (X, Y, Z) vom Ursprung liegt in der xy-Ebene (da $z_m = 0$) und hat die Länge:

$$d = \sqrt{x_m^2 + y_m^2 + z_m^2} = a\sqrt{X^2 + Y^2} = a \sin\varphi, \tag{59}$$

wo φ die „Poldistanz" des sphärischen Bildes des K-Strahls ist. Die Strahlen mit derselben Poldistanz φ und mit $(\pi - \varphi)$ liefern also bei einem solchen K-System $(a \neq 0)$ die zwei Geradenscharen eines Drehhyperboloids mit der Z-Achse als Drehachse.

Das ganze Strahlensystem ist daher ein Rotationssystem und besteht aus den geradlinigen Erzeugenden von ∞^1 Drehhyperboloiden $\left(\text{deren Gleichung ist } \frac{x^2+y^2}{a^2\sin^2\varphi} - \frac{z^2}{a^2\cos^2\varphi} = 1,\ \varphi \text{ Parameter}\right)$. Der Veränderung des Wertes a entspricht eine Ähnlichkeitstransformation des Systems mit dem Ursprung O als Zentrum. Diese K-Systeme umfassen alle isotropen Umdrehungskongruenzen; sie sind besonders in „K. Zindler, Liniengeometrie" behandelt, aber mehr vom liniengeometrischen Standpunkt aus [8 § 29].

Wie K. Kommerell gezeigt hat [9], lassen sich die Systeme auch mit der Kinematik in Verbindung bringen. Die allgemeinste Lageänderung des starren Raums läßt sich so durchführen, daß man den Raum um eine durch einen Punkt S gehende Achse $\mathfrak{a}$ um den Winkel ϑ dreht und dann dem Raum eine Translation $\mathfrak{s}$ erteilt, wodurch S in S' übergeht. Jede solche Lageänderung läßt sich andererseits nach dem Satz von Chasles durch eine Verschraubung des Raums bewerkstelligen. Wählt man nun Punkt S, den Drehwinkel ϑ und die Translation $\mathfrak{s}$ fest und gibt der Drehachse $\mathfrak{a}$ alle möglichen Richtungen, so liefern die zugehörigen Schraubenachsen ein isotropes K-System [Näheres s. 9]. Wir erhalten genau obige Lage, wenn $S\,S'$ auf der z-Achse liegt und durch O halbiert wird. Der kürzeste Abstand d [s. (59)]

einer Schraubenachse von O ergibt sich aus $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$ und ϑ durch

$$d = \frac{1}{2}\,|\mathfrak{s}|\,\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\sin(\mathfrak{s},\mathfrak{a}).$$

§ 8.

Formeln für die Normalensysteme und Folgerungen allgemeinerer Art.

Bei den Normalensystemen lauten die Gleichungen für die Mittelfläche nach (1) und (14)

$$(60)\quad \begin{cases} x_m = \frac{1}{2}U'(1-u^2)+\frac{1}{2}V'(1-v^2) = \frac{1}{2}U_1(u)+\frac{1}{2}V_1(v), \\ y_m = \frac{i}{2}U'(1+u^2)-\frac{i}{2}V'(1+v^2) = \frac{1}{2}U_2(u)+\frac{1}{2}V_2(v), \\ z_m = \quad uU'+vV' \quad = \frac{1}{2}U_3(u)+\frac{1}{2}V_3(v). \end{cases}$$

[vgl. 6 (12)].

Die Orthogonalflächen dieser Systeme wurden erstmalig im Jahr 1888 von Paul Appell untersucht [6] und heißen darum Appellsche Flächen [Enzyklopädie III D]. Für die Abszisse t_1 des Punktes einer Orthogonalfläche und für den Abstand W der Tangentialebene in diesem Punkt vom Ursprung gilt nach (17) und (18)

$$t_1 = W = U(u)+V(v) = -\frac{1}{2}(r_1+r_2),$$

also

$$(61)\qquad r_1+r_2 = f(u)+\varphi(v)$$

$$\big(\text{wo } f(u) = -2U(u),\quad \varphi(v) = -2V(v)\big).$$

Nun hat de Montcheuil in zwei größeren Arbeiten [7] die Flächen untersucht, deren Hauptkrümmungsradien einer Beziehung von der Form (61) unterliegen. Einige interessante Eigenschaften dieser Flächen und ihrer Normalensysteme sollen an Hand unserer speziellen Systeme dargelegt werden.

Nach (60) läßt sich die Mittelfläche auffassen als Ort der

Mitten der Verbindungslinien zweier entsprechender Punkte (u, v konjugiert komplex) der Kurven

$$(60\,a) \qquad \begin{cases} x_1 = U_1(u), & y_1 = U_2(u), & z_1 = U_3(u), \\ x_2 = V_1(v), & y_2 = V_2(v), & z_2 = V_3(v). \end{cases}$$

Gleichung (60) zeigt, daß die beiden Kurven — nennen wir sie Γ_1 und Γ_2 — auf dem isotropen Kegel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ liegen.

Dieselbe Konstruktion gibt de Montcheuil für die Mittelflächen aller seiner Normalensysteme an, nur daß dann die beiden Kurven Γ_1 und Γ_2 beliebige Raumkurven sein können, die auf den Tangentenflächen irgend zweier Minimalkurven liegen. Bezeichnet man die zwei entsprechenden Punkte, die auf solchen Raumkurven wandern, mit C_1 und C_2, so beschreibt also die Mitte P der Strecke $C_1 C_2$ die Mittelfläche eines Normalensystems von de Montcheuil. Sind E_1 und E_2 die Tangentialebenen in C_1 und C_2 an die abwickelbaren Tangentenflächen der Minimalkurven, so gibt die Schnittlinie der Ebenen E_1 und E_2 die Richtung des Systemstrahls (u, v) durch P an.

In unserem besonderen Fall heißt das: die zwei Ebenen E_1 und E_2, welche den isotropen Kegel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ in zwei entsprechenden Punkten der Kurven (60a) berühren, besitzen eine Schnittlinie von der Richtung $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$; dies läßt sich auch mühelos bestätigen.

Wählt man als Kurven Γ_1 und Γ_2 Minimalkurven, so erhält man bekanntlich [2 S. 70] Minimalflächen als Mittelflächen (in Gleichung (61) wird $f(u) = 0$ und $\varphi(v) = 0$). Wie man ferner die Minimalflächen als Schiebungsflächen auffassen kann, die durch Translation einer Minimalkurve längs einer andern entstehen [2 S. 70], so lassen sich alle Mittelflächen der Normalensysteme von de Montcheuil als Schiebungsflächen auffassen [vgl. (60)]. Wir können sie also gewissermaßen als verallgemeinerte Minimalflächen ansehen.

Nach K. Kommerell [5 S. 148] sind die Mitteleinhüllenden aller dieser Systeme Minimalflächen. Sie arten allerdings für unsre Systeme zum Punkt aus (wie schon oben S. 36 erwähnt).

Diese selbst mit ihren Orthogonalflächen, den Appellschen Flächen, sind auch bei de Montcheuil näher untersucht im „zweiten Fall“ des ersten Teils [7a S. 107—109], jedoch ohne daß der Name Appell erwähnt würde.

§ 9.

Beziehung zwischen Appellschen Flächen und Minimalflächen bzw. Bonnetschen Flächen.

Bevor wir in die Untersuchung besonderer Normalensysteme eintreten, sollen einige Beziehungen derselben zu Systemen anderer Art betrachtet werden.

1. Setzt man

$$-\frac{U'}{u} = F(u), \quad -\frac{V'}{v} = \Phi(v), \tag{62}$$

und sind (ξ, η, ζ) die Koordinaten der durch $F(u)$ und $\Phi(v)$ bestimmten Minimalfläche, so ist nach (27)

$$\zeta = \int u F(u)\, du + \int v \Phi(v)\, dv = -U(u) - V(v),$$
$$-\zeta = +W.$$

Dies ist die von Appell durch Vergleich der Ebenenkoordinaten aufgestellte Beziehung, nach der jeder Orthogonalfläche eines Appellschen Strahlensystems durch Parallelität der Tangentialebenen eine — abgesehen von Verschiebungen parallel der xy-Ebene — wohl bestimmte Minimalfläche zugeordnet wird, und umgekehrt. Dabei ist der Abstand des Punktes (u, v) der Minimalfläche von der xy-Ebene gleich dem Abstand der Tangentialebene (u, v) der Orthogonalfläche vom Ursprung O, und gleichzeitig haben die Flächennormalen in beiden Punkten dieselbe Richtung [6 S. 182—184]. Die zu einem Appellschen System gehörige Parallelschar von Orthogonalflächen ist durch diese Beziehung einer Schar von Minimalflächen zugeordnet, die durch Verschiebung parallel der z-Achse auseinander hervorgehen.

Die Beziehung (62) entbehrt nicht einer gewissen Willkür. Läßt man etwa die Minuszeichen weg, so erhält man

$$\zeta = W.$$

Auch könnte man den Abstand W durch ähnliche Bedingungen zwischen $F(u)$ und U' mit den ξ- oder η-Koordinaten einer Minimalfläche in Beziehung setzen.

Aus $$F(u) = \frac{2U'}{1-u^2}$$

z. B. folgt $$\xi = W.$$

2. Ein Bonnetsches Normalensystem ist bestimmt durch die Gleichungen [4 S. 312 und S. 293 Anm.]

(62a) $$\begin{cases} x = \eta + tX = \bar{x} + tX, \\ y = -\xi + tY = \bar{y} + tY, \\ z = c + tZ = \bar{z} + tZ \quad (c \text{ reelle Konstante}). \end{cases}$$

Dabei ist die Abszisse des Punktes (u, v) einer Orthogonalfläche

$$t_0 = -\int\left(\sum\left(X\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}\right)du + \sum\left(X\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}\right)dv\right),$$

nach (27)

$$t_0 = -\int\left\{\frac{\frac{1}{2}F(u)\,du}{1+uv}\left[i(1+u^2)(u+v) + i(u-v)(1-u^2)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{\frac{1}{2}\Phi(v)\,dv}{1+uv}\left[-i(1+v^2)(u+v) + i(u-v)(1-v^2)\right]\right\}$$
$$= -\int\{iuF(u)\,du - iv\Phi(v)\,dv\}.$$

Wird also

$$-iuF(u) = U', \quad iv\Phi(v) = V',$$

so ist

(63) $$t_0 = U(u) + V(v) = W.$$

Diese ebenfalls von Appell aufgestellte Beziehung [6 S. 184] zeigt die Möglichkeit, eine Appellsche Fläche einer nach (62a) gebildeten Bonnetschen Orthogonalfläche durch Parallelität der Tangentialebenen zuzuordnen derart, daß W gleich der Länge t_0 zwischen Mittelfläche ($z = c$) und Orthogonalfläche des entsprechenden Strahls des Bonnetschen Strahlensystems ist.

Kennt man also sämtliche Minimalflächen oder alle Bonnetschen Strahlensysteme, so läßt sich jede Appellsche Fläche als Einhüllende ihrer Tangentialebenen bestimmen.

§ 10.

Ribaucour-Normalensysteme.

Als besondere Gruppe der Normalensysteme wurden bei $R \neq 0$ die Ribaucour-Normalensysteme behandelt. Wir suchten dort auch schon deren Gleichungen für $R = 0$ [Gleichung (50) und (52) S. 29]. Auf sie wollen wir nun zurückkommen.

$$\text{Die Systeme mit } U' = \frac{A}{u}, \quad V' = \frac{\bar{A}}{v}, \quad A \neq 0.$$

[vgl. (50) S. 29]

Bei den Ribaucour-Systemen für $U' = \frac{A}{u}$ werden die Gleichungen der Mittelfläche nach (60)

$$z_m = uU' + vV' = A + \bar{A} = \text{const.},$$

$$x_m = \frac{1}{2} A \left(\frac{1}{u} - u\right) + \frac{1}{2} \bar{A} \left(\frac{1}{v} - v\right)$$

$$= \frac{i}{2} \int (1 + u^2) \frac{iA}{u^2} du - \frac{i}{2} \int (1 + v^2) \frac{-i\bar{A}}{v^2} dv,$$

$$y_m = \frac{i}{2} A \left(\frac{1}{u} + u\right) - \frac{i}{2} \bar{A} \left(\frac{1}{v} + v\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \int (1 - u^2) \frac{iA}{u^2} du - \frac{1}{2} \int (1 - v^2) \frac{-i\bar{A}}{v^2} dv.$$

Diese Gleichungen zeigen an, daß die vorliegenden Systeme Bonnetsche Strahlensysteme sind, deren Mittelflächen den mit $F(u) = \frac{iA}{u^2}$ festgelegten Minimalschraubenflächen durch Orthogonalität der Elemente entsprechen. (Die in § 9, 2 aufgestellte Beziehung zwischen Bonnetschen und Appellschen Flächen wird hier trivial, weil die einander zugeordneten Flächen überhaupt

identisch sind und für jede Appellsche Orthogonalfläche die Abszisse $t_1 = W$ wird.) Dies liefert unter den Appellschen Flächen auch die einzige Art von Bonnetschen Flächen, denn $z_m = uU' + vV'$ wird nur konstant für $U' = \frac{A}{u}$, $V' = \frac{\bar{A}}{v}$ (A, $\bar{A}$ Konstante).

Um die Systeme näher zu untersuchen, trennen wir das Reelle vom Imaginären und setzen

$$A = \frac{1}{2}(\varkappa - i\alpha), \quad \bar{A} = \frac{1}{2}(\varkappa + i\alpha).$$

Dann lauten die Gleichungen für die Mittelfläche

$$x_m = \frac{\varkappa}{4uv}(u+v)(1-uv) - \frac{\alpha}{4uv} i(v-u)(1+uv),$$

$$y_m = \frac{\varkappa}{4uv} i(v-u)(1-uv) + \frac{\alpha}{4uv}(u+v)(1+uv),$$

$$z_m = \varkappa.$$

Durch die Substitution (53)

$$u = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} e^{i\psi}, \quad v = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} e^{-i\psi}$$

führen wir Kugelparameter ein und finden

$$x_m = -\frac{\varkappa 2\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cos\psi\cos\varphi}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{\alpha 2\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\sin\psi}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$= -\frac{\varkappa\cos\varphi\cos\psi}{\sin\varphi} - \frac{\alpha\sin\psi}{\sin\varphi},$$

$$y_m = -\frac{\varkappa 2\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\sin\psi\cos\varphi}{4\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}} + \frac{\alpha 2\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cos\psi}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$= -\frac{\varkappa\cos\varphi\sin\psi}{\sin\varphi} + \frac{\alpha\cos\psi}{\sin\varphi},$$

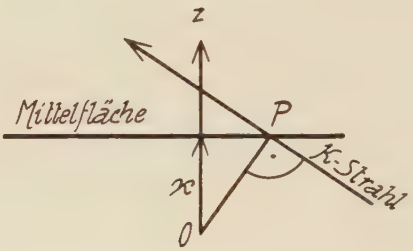
$$z_m = \varkappa.$$

Durch Vergleich mit (21) ergibt sich

$$\lambda = -\frac{\varkappa}{\sin\varphi}, \quad \mu = \frac{a}{\sin^2\varphi}.$$

Es liegen also die Drehnormalensysteme des § 5 vor mit $R = 0$.

Für $a = 0$ wird A reell; dann liegen nach dem Befund von § 5 die Systemstrahlen in Ebenen, welche die z-Achse enthalten. Zeichnet man die Systemstrahlen einer solchen Ebene, so erkennt man, daß sie eine Parabel einhüllen mit dem Ursprung als Brennpunkt.



Auch für komplexes A lassen sich die Systemstrahlen leicht konstruieren. Für $\psi = 0$ wird nämlich

$$x_m^2 = \varkappa^2 \operatorname{ctg}^2\varphi,$$

$$y_m^2 = \frac{a^2}{\sin^2\varphi} = a^2 \operatorname{ctg}^2\varphi + a^2,$$

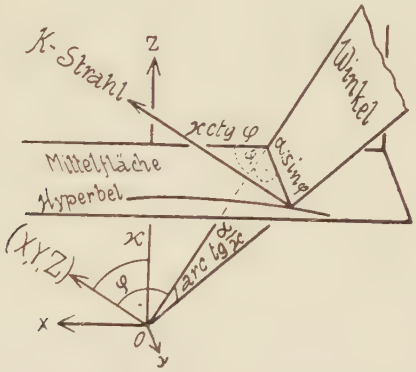
$$z_m = \varkappa.$$

Durch Elimination von φ erhält man (für $\varkappa \neq 0$)

$$\frac{1}{a^2} y_m^2 - \frac{1}{\varkappa^2} x_m^2 = 1.$$

Um also die Strahlen $\psi = 0$ zu erhalten, muß man (s. § 5) die Strahlen $\psi = 0$ des Systems $a = 0$, welche in der xz-Ebene liegen, so aus dieser Ebene parallel der y-Achse unter Wahrung der Strahlenrichtung verschieben, daß sie die Mittelfläche $z_m = \varkappa$ in der obigen Hyperbel schneiden. Dreht man um den Ursprung O den festen Winkel arc tg $\frac{a}{\varkappa}$ so, daß die Winkelebene immer parallel

zur y-Achse ist und der eine Schenkel in der xz-Ebene liegt, dann schneidet der andere Schenkel aus der Mittelfläche die Hyperbel aus, wie man aus untenstehender Figur ablesen kann. Die Normale auf der Winkelebene ist jeweils parallel dem zugehörigen Systemstrahl. Damit ist eine bequeme mechanische Erzeugungsweise der Strahlen $\psi = 0$ gegeben. — Wie schon in



§ 5 ausgeführt wurde, braucht man diese Strahlen nur noch um die z-Achse zu drehen, um das ganze Strahlensystem zu erhalten.

Wir wollen noch die Brennflächen dieser Normalensysteme betrachten. Die Gleichung (10) für die Abszissen ϱ der Brennpunkte

$$\varrho^2 = \frac{1}{\Delta_0^2}\left(\overline{D}\,\overline{D}_1' - \overline{D}\,\overline{D}''\right)$$

geht wegen

$$\lambda = -\frac{\varkappa}{\sin\varphi}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} = \frac{\varkappa\cos\varphi}{\sin^2\varphi}; \quad \mu = \frac{a}{\sin^2\varphi}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial\varphi} = -\frac{2a\cos\varphi}{\sin^3\varphi}$$

und wegen der Gleichungen (2) und (20) über in

$$\varrho^2 = \frac{1}{\sin^2\varphi}\left[\left(\frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right)^2 + \frac{\varkappa\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{\varkappa\sin\varphi\cos\varphi}{\sin\varphi}\right],$$

$$\varrho = \pm\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\sqrt{a^2+\varkappa^2}.$$

Für die Brennfläche gilt daher nach (19) und (21)

$$z = \varkappa \pm \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\sqrt{a^2+\varkappa^2} = \varkappa \pm \operatorname{ctg}^2\varphi\sqrt{a^2+\varkappa^2},$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= [(\lambda\cos\varphi+\varrho\sin\varphi)\cos\psi-\mu\sin\varphi\sin\psi]^2 \\ &\quad +[(\lambda\cos\varphi+\varrho\sin\varphi)\sin\psi+\mu\sin\varphi\cos\psi]^2 \\ &= (\lambda\cos\varphi+\varrho\sin\varphi)^2+\mu^2\sin^2\varphi = \operatorname{ctg}^2\varphi\left[-\varkappa\pm\sqrt{a^2+\varkappa^2}\right]^2 \\ &\quad +a^2(1+\operatorname{ctg}^2\varphi) = \operatorname{ctg}^2\varphi\left[\left(-\varkappa\pm\sqrt{a^2+\varkappa^2}\right)^2+a^2\right]+a^2. \end{aligned}$$

Durch Elimination von φ ergibt sich die Gleichung eines Drehparaboloids

$$az = c + k(x^2+y^2),$$

das allerdings unter Umständen ausartet.

Ribaucour-Systeme mit $U' = \delta u^{\varepsilon-1}$.

Es verbleiben noch die Ribaucour-Systeme mit

$$U' = \delta u^{\varepsilon-1}, \quad F(u) = i\gamma u^{\varepsilon-2}, \quad \varepsilon > 0 \ [(52)\ \text{S. } 29].$$

Die Gleichungen der abwickelbaren Flächen (und der Krümmungslinien auf den Orthogonalflächen) lauten hier nach (29)

$$u^{\frac{\varepsilon}{2}} + v^{\frac{\varepsilon}{2}} = \varrho_1; \quad i\left(u^{\frac{\varepsilon}{2}} - v^{\frac{\varepsilon}{2}}\right) = \varrho_2. \tag{64}$$

Ferner ist

$$t_1 = U(u)+V(v) = \frac{\delta}{\varepsilon}(u^\varepsilon+v^\varepsilon)+c+\bar{c} \quad (c+\bar{c}\ \text{reelle Konstante})$$

und

$$z_m = \delta(u^\varepsilon+v^\varepsilon).$$

Nennen wir die Kurven auf den Orthogonalflächen, für welche die Abszissen t_1 eine konstante Länge haben, die „Kurven konstanten Mittelstücks“, so gilt darum der Satz: Die Systemstrahlen, welche auf der Orthogonalfläche die Kurven konstanten Mittelstücks ausschneiden, schneiden bei den Systemen mit $U' = \delta u^{\varepsilon-1}$, $\varepsilon > 0$, auf der Mittelfläche die Kurven aus, welche in Ebenen senkrecht zur z-Achse liegen.

Werden mittels (64) die Krümmungslinien (ϱ_1, ϱ_2) als Para-

meterkurven eingeführt, so erscheint die Gleichung jener Kurven in der einfachen Form

$$\varrho_1^2 - \varrho_2^2 = \text{konstant}.$$

Für $\varepsilon = 1$ lautet ihre Gleichung $u + v = 2\sigma = \text{konstant}$, oder nach (6)

$$X = \sigma(1 - Z), \qquad \text{d. h.:}$$

Das Bild der Flächennormalen längs der Kurven konstanten Mittelstücks ist bei $U' = \delta$ eine Schar von Kreisen, die aus der Bildkugel durch das Ebenenbüschel ausgeschnitten werden, welches die Gerade $x = 0$, $z = 1$ als Achse besitzt.

Ohne Beweis sei angeführt, daß hier die Mittelfläche durch eine Gleichung 4. Grads in x, y, z angegeben wird und die erwähnten Flächennormalen diese Fläche in einer Schar von Parabeln schneiden.

Übrigens läßt sich zeigen, daß das sphärische Bild obiger Kurven für $U' = \delta u$ zwar nichtzerfallende Kurven 4. Grads liefert, aber nicht — wie de Montcheuil schreibt [7a S. 108/09] — homothetische sphärische Ellipsen und Hyperbeln.

Denn die Gleichung der Bildkurven

$$u^2 + v^2 = \sigma$$

ist nach (6) S. 6 gleichwertig mit

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \quad (X + iY)^2 + (X - iY)^2 = \sigma(1 - Z)^2 \text{ oder}$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \qquad 2(X^2 - Y^2) \qquad = \sigma(1 - Z)^2.$$

Diese Kurven haben aber im Punkt $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 1$ einen Knotenpunkt, und das ist bei sphärischen Ellipsen nicht der Fall.

Allgemein sei zu den Kurven konstanten Mittelstücks auf Appellschen Flächen bemerkt, daß sie identisch sind mit den Kurven, längs deren die Summe der Hauptkrümmungsradien der Orthogonalfläche konstant ist, und mit den Kurven, längs deren die Tangentialebenen an die Orthogonalflächen konstanten Abstand W vom Ursprung O haben. Denn nach (18) gilt

$$-\frac{1}{2}(r_1 + r_2) = t_1 = W.$$

Daraus folgt auch, daß diesen Kurven durch die Zuordnung des § 9 auf den Minimalflächen die Kurven $\zeta = \text{konstant}$, auf den Bonnetschen Flächen ebenfalls die Kurven $t_0 = \text{konstant}$ entsprechen. Endlich gilt der Satz: Die sphärischen Bilder der Kurven konstanten Mittelstücks lassen sich als die eine Schar eines Isothermensystems auffassen.

Wählt man nämlich diese Kurven

$$x_1 = U(u) + V(v)$$

und die Kurven

$$x_2 = iU(u) - iV(v)$$

zu Parameterlinien, so ist u Funktion von $(x_1 - ix_2)$, v eine Funktion von $(x_1 + ix_2)$; folglich gilt für das Linienelement des sphärischen Bildes (wo $\Phi(x_1, x_2)$ durch $U(u)$, $V(v)$ bestimmte Funktion)

$$ds_0^2 = \frac{4\,du\,dv}{(1+uv)^2} = (dx_1^2 + dx_2^2)\,\Phi(x_1, x_2).$$

x_1 und x_2 sind also thermische Parameter.

Ribaucour-Systeme mit ebenen Krümmungslinien.

Wir legen uns noch die Frage vor, welche K-Systeme Orthogonalflächen mit lauter ebenen Krümmungslinien aufweisen. Sie lassen sich mit Hilfe der Tatsache bestimmen, daß das sphärische Bild einer Krümmungslinie dann und nur dann ein Kreis wird, wenn sie eben ist. Die Bildkurven der Krümmungslinien sind also hier zwei Kreisscharen, welche sich orthogonal schneiden. Solche kann man aber immer als Bild der Krümmungslinien einer Minimalfläche auffassen [3 S. 69] und daher auch als Bild der Asymptotenlinien der adjungierten Minimalfläche. Die gesuchten Systeme sind also Ribaucour-Normalensysteme Die durch $U' = \frac{\varkappa + 2R}{2u}$ bestimmten Kongruenzen (s. § 6) sind demnach für $R \neq 0$ die einzigen K-Systeme, deren Orthogonalflächen lauter ebene Krümmungslinien besitzen. — Für $R = 0$ kann es außer den oben behandelten Drehsystemen mit $U' = \frac{\varkappa}{2u}$

noch andere Systeme geben, die, von der Orientierung abgesehen, unter den Systemen mit

$$(52) \qquad U' = \delta u^{\varepsilon - 1}, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{oder mit} \quad (50) \quad U' = \frac{A}{u}$$

enthalten sein müssen.

Zur Lösung der Aufgabe bilden wir die Gaußische Kugel durch die stereographische Projektion konform auf die xy-Ebene ab. Sie wird durch die Gleichungen vermittelt [vgl. 1 S. 154]

$$u = x + iy, \quad v = x - iy.$$

Die Gleichungen der Krümmungslinien (29) gehen damit bei (52) über in

$$(65) \qquad \begin{cases} (x+iy)^{\frac{\varepsilon}{2}} + (x-iy)^{\frac{\varepsilon}{2}} = \varrho_1, \\ i(x+iy)^{\frac{\varepsilon}{2}} - i(x-iy)^{\frac{\varepsilon}{2}} = \varrho_2; \end{cases}$$

bei (50) gilt

$$(65\,a) \qquad \begin{cases} A^{\frac{1}{2}} \ln u + \overline{A}^{\frac{1}{2}} \ln v = \varrho_1, \\ iA^{\frac{1}{2}} \ln u - i\overline{A}^{\frac{1}{2}} \ln v = \varrho_2. \end{cases}$$

Dies müssen nun Gleichungen von Kreisen oder Geraden sein. Für $\varepsilon > 0$ können in (65) nur die Werte $\varepsilon = 4$ oder $\varepsilon = 2$ in Betracht kommen. Setzt man $\varepsilon = 4$, so erkennt man sofort, daß dies nicht die gewünschten Kurven gibt. Für $\varepsilon = 2$ dagegen erhält man das Geradennetz

$$2x = \varrho_1, \quad 2y = -\varrho_2.$$

Ebenso leicht findet man durch Einführung von Polarkoordinaten $u = re^{i\varphi}$ in der Ebene, daß in Gleichung (65a) nur für reelles A Kreise oder Gerade entstehen. Im Falle $R = 0$ besitzen also außer den Drehsystemen für $U' = \frac{\varkappa}{2u}$ auch die Systeme für $U' = \delta u$ Orthogonalflächen mit zwei Scharen ebener Krümmungslinien, und dies sind, abgesehen von der Orientierung im Raum auch die einzigen Systeme.

§ 11.

Ribaucour-Systeme mit Rotationsflächen als erzeugenden Flächen.

Zum Abschluß der Untersuchungen über die K-Systeme mit Kugelradius $R = 0$ fragen wir nach den Ribaucour-Systemen, deren erzeugende Flächen Rotationsflächen sind.

Wir wählen die Gleichung der Rotationsflächen in der Form

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = \int f(u)\,du;$$

deren Fundamentalgrößen erster Ordnung lauten [nach 1 S. 110]

$$E = 1 + f(u)^2, \quad G = u^2, \quad F = 0;$$

ferner ist

$$\Delta = \sqrt{EG - F^2} = u\sqrt{1 + f(u)^2}.$$

Für die Flächennormalen X, Y, Z gilt

$$X = \frac{-f(u)}{\sqrt{1+f(u)^2}}\cos v, \qquad Y = \frac{-f(u)}{\sqrt{1+f(u)^2}}\sin v, \qquad Z = \frac{1}{\sqrt{1+f(u)^2}},$$

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{f'}{\sqrt{1+f^2}^3}\cos v, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = -\frac{f'}{\sqrt{1+f^2}^3}\sin v, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = -\frac{ff'}{\sqrt{1+f^2}^3},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\sin v, \qquad \frac{\partial Y}{\partial v} = -\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\cos v, \qquad \frac{\partial Z}{\partial v} = 0.$$

Daraus kommt für die Kummerschen Fundamentalgrößen der Systeme

$$E_0 = \frac{f'^2}{(1+f^2)^2}, \quad \frac{\partial E_0}{\partial u} = \frac{2f'[f''(1+f^2) - 2ff'^2]}{(1+f^2)^3}, \quad \frac{\partial E_0}{\partial v} = 0,$$

$$F_0 = 0,$$

$$G_0 = \frac{f^2}{1+f^2}, \quad \frac{\partial G_0}{\partial u} = \frac{2ff'}{(1+f^2)^2}, \quad \frac{\partial G_0}{\partial v} = 0,$$

$$\Delta_0 = \frac{ff'}{\sqrt{1+f^2}^3}, \quad \frac{\partial \Delta_0}{\partial u} = \frac{f'^2 - 2f^2f'^2 + ff'' + f^3f''}{\sqrt{1+f^2}^5}, \quad \frac{\partial \Delta_0}{\partial v} = 0.$$

Damit $\Delta_0 \not\equiv 0$ wird, müssen wir $f(u) \not\equiv 0$, $f'(u) \not\equiv 0$ voraussetzen

Bei diesen Parametern (u, v) gilt aber

$$-\bar{D} = E_0 \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial E_0}{\partial u} = \frac{f'^2}{(1+f^2)^2} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \lambda \frac{f'[f''(1+f^2) - 2ff'^2]}{(1+f^2)^3},$$

$$-\bar{D}'' = G_0 \frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial G_0}{\partial u} = \frac{f^2}{1+f^2} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial v} + \lambda \frac{ff'}{(1+f^2)^2},$$

$$-\bar{D}' = E_0 \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\mu}{2} \frac{\partial G_0}{\partial u} = \frac{f'^2}{(1+f^2)^2} \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \mu \frac{ff'}{(1+f^2)^2},$$

$$-\bar{D}_1' = G_0 \frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial G_0}{\partial u} = \frac{f^2}{1+f^2} \frac{\partial \mu}{\partial u} + \mu \frac{ff'}{(1+f^2)^2}.$$

Dabei unterliegen λ und μ der Bedingung (4) S. 5.

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda f f'}{\sqrt{1+f^2}^3}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mu f f'}{\sqrt{1+f^2}^3}\right) = 0$$

oder nach Multiplikation mit $(1+f^2)^{\frac{5}{2}}$

$$(66) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} ff'(1+f^2) + \dfrac{\partial \mu}{\partial v} ff'(1+f^2) \\ \qquad + \lambda[(f'^2 + ff'')(1+f^2) - 3f^2 f'^2] = 0. \end{array} \right.$$

Die Gleichung der abwickelbaren Flächen (15) ist

$$(D G_0 - E_0 D'')\, du dv + D' G_0 dv^2 - E_0 \bar{D}_1' du^2 = 0.$$

Sie entsprechen den Asymptotenlinien der erzeugenden Fläche, welche bei unseren Rotationsflächen durch die Gleichung bestimmt sind [1 S. 110]

$$f'(u)\, du^2 + u f(u) dv^2 = 0;$$

zur Bedingung (66) tritt also noch hinzu

$$\bar{D} G_0 - E_0 \bar{D}'' = 0 \quad \text{und} \quad E_0 \bar{D}_1' u f(u) + G_0 D' f' = 0.$$

Aus der ersten Gleichung wird nach einer Multiplikation mit $\frac{(1+f^2)^4}{ff'}$

$$(67) \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} ff'(1+f^2) + \lambda[ff''(1+f^2) - 2f^2 f'^2 - f'^2] \\ \qquad - \dfrac{\partial \mu}{\partial v} ff'(1+f^2) = 0, \end{array} \right.$$

aus der zweiten nach Multiplikation mit $\frac{(1+f^2)^4}{f^2 f'^2}$

$$(68)\quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} f'(1+f^2)+\mu[uf'-f(1+f^2)]+\frac{\partial \mu}{\partial u} uf(1+f^2)=0.$$

Bei Addition von (66) und (67) und Division durch $2f$ erhält man

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} f'(1+f^2)+\lambda[f''(1+f^2)-2ff'^2]=0$$

und durch Integration

$$\lambda = C'(v)\frac{1+f^2}{f'}.$$

Entsprechend ergibt sich bei Subtraktion von (66) und (67) und Division durch $2f'$

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} f(1+f^2)+\lambda f'=0;$$

unter Berücksichtigung des Wertes für λ folgt durch Integration

$$\mu = -\frac{1}{f} C(v)+U_1(u).$$

Die nähere Bestimmung der Funktionen $C(v)$ und $U_1(u)$ findet man aus (68):

$$(69)\quad \left\{\begin{array}{l} C''(v)(1+f^2)^2+C(v)[(1+f^2)+uff'] \\ \qquad\qquad +U_1' uf(1+f^2)+U_1[uf'-f(1+f^2)]=0. \end{array}\right.$$

Durch Differentiation nach v kommt

$$C'''(v)(1+f^2)^2+C'(v)[1+f^2+uff']=0.$$

Bei $C'(v)\neq 0$ ist

$$\frac{C'''(v)}{C'(v)}=-\frac{1+f^2+uff'}{(1+f^2)^2}=g=\text{konstant}$$

oder

$$uff'=-g(1+f^2)^2-(1+f^2),$$

$$\frac{2ff'}{(1+f^2)[g(1+f^2)+1]}=-\frac{2}{u},$$

$$(1+f^2)=\frac{c}{u^2-gc} \qquad (c\neq 0 \text{ Integrationskonstante}).$$

Dazu gehört:

a) $C(v) = a_2 v^2 + a_1 v + a_0$, falls $g = 0$;

b) $C(v) = A e^{\sqrt{g}v} + B e^{-\sqrt{g}v} + a_0$, falls $g \neq 0$.

Für $g < 0$ sind A und B konjugiert komplex, und das Ergebnis läßt sich umformen zu

$$C(v) = \alpha \cos \sqrt{-g}v + \beta \sin \sqrt{-g}v + a_0.$$

Dazu gehört

$$f = \sqrt{\frac{c + cg - u^2}{u^2 - cg}}, \quad ff' = -\frac{uc}{(u^2 - gc)^2};$$

aus der Gleichung (69) wird für $g \neq 0$

$$a_0 (uff' + 1 + f^2) + U_1' uf(1 + f^2) + U_1 [uf' - f(1 + f^2)] = 0$$

oder

$$U_1(u) = d\frac{u}{f}\sqrt{1 + f^2} + \frac{a_0}{f} = \left(du\sqrt{\frac{c}{u^2 - gc}} + a_0\right)\sqrt{\frac{u^2 - gc}{c + gc - u^2}}.$$

Bei $C(v) = a_2 v^2 + a_1 v + a_0, \quad g = 0$

wird aus (69)

$$2a_2 (1 + f^2)^2 + U_1' uf(1 + f^2) + U_1 [uf' - f(1 + f^2)] = 0$$

oder wegen

$$1 + f^2 = \frac{c}{u^2}, \quad f = \frac{\sqrt{c - u^2}}{u},$$

$$U_1(u) = d\frac{u}{f}\sqrt{1 + f^2} + \frac{a_2 c}{u\sqrt{c - u^2}}.$$

Ist aber $C'(v) = 0$, also $C(v) = a_0$, so wird ebenfalls

$$U_1(u) = d\frac{u}{f}\sqrt{1 + f^2} + \frac{a_0}{f},$$

aber f ist beliebig.

Anmerkung: Dieselbe Aufgabe läßt sich auch für $R \neq 0$ behandeln; die Lösung würde gelingen, wenn man die Differentialgleichung

$$\frac{ff'}{1 + f^2}\left(\frac{a_1 - R \operatorname{arc\,tg} f}{Rf + a_1 - R \operatorname{arc\,tg} f}\right) = -\frac{1}{u}$$

integrieren könnte.

Zusammenstellung.

Die Gleichungen der Mittelfläche unserer Systeme sind in obigen Parametern:

$$x_m = -C'(v)\frac{\cos v}{\sqrt{1+f^2}} + \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\left[-\frac{C(v)}{f} + U_1(u)\right]\sin v,$$

$$y_m = -C'(v)\frac{\sin v}{\sqrt{1+f^2}} - \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\left[-\frac{C(v)}{f} + U_1(u)\right]\cos v,$$

$$z_m = -C'(v)\frac{f}{\sqrt{1+f^2}},$$

wo

$$\sqrt{1+f^2} = \sqrt{\frac{c}{u^2 - gc}}$$

und

$$U_1(u) = d\frac{u}{f}\sqrt{1+f^2} + \frac{a_2 c}{u\sqrt{c-u^2}}, \quad C(v) = a_2 v^2 + a_1 v + a_0,$$

für $g = 0$,

oder

$$U_1(u) = d\frac{u}{f}\sqrt{1+f^2} + \frac{a_0}{f}$$

und

$$C(v) = A e^{\sqrt{g}v} + B e^{-\sqrt{g}v} + a_0 \qquad \text{für } g > 0,$$

$$C(v) = \alpha\cos\left(\sqrt{-g}v\right) + \beta\sin\left(\sqrt{-g}v\right) + a_0 \qquad \text{für } g < 0$$

ist, oder aber

$$f(u) \text{ beliebig und } C'(v) = 0.$$

Im letzten Fall wird die Gleichung der Mittelfläche

$$z_m = \lambda\frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

Nach § 7 sind dies unsere isotropen Drehsysteme. Sie lassen sich durch Orthogonalität der Elemente allen Rotationsflächen zuordnen, ausgenommen Kegel und Zylinder, weil dort die sphärische Abbildung der Normalen ausartet.

V. Zweite mehr konstruktive Betrachtungsweise der K-Systeme.

Formeln für ein K-System.

Es liegt nahe, nach dem Vorbild von K. Kommerell, „Strahlensysteme nnd Minimalflächen“, noch kurz einen zweiten Weg zur Bestimmung der K-Systeme zu versuchen, der dort zu den einfachen Formeln für die isotropen Systeme geführt hat [5 S. 152–157]. Die Gleichungen für die Mittelfläche eines K-Systems lassen auch den Ansatz zu

$$(70)\qquad \left|\begin{aligned} x_m &= RX + Yc - Zb,\\ y_m &= RY + Za - Xc,\\ z_m &= RZ + Xb - Ya, \end{aligned}\right.$$

(wo a, b, c gewisse Funktionen der zwei Parameter u und v sind).

Denn hier ist der auf dem B-Strahl gelegene Vektor $BP = \mathfrak{T}$ als äußeres Produkt von

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{i}X + \mathfrak{j}Y + \mathfrak{k}Z \text{ und } \mathfrak{H} = \mathfrak{i}a + \mathfrak{j}b + \mathfrak{k}c$$

dargestellt:

$$(71)\qquad \mathfrak{T}(x_m, y_m, z_m) = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ X & Y & Z \\ a & b & c \end{vmatrix} = [\mathfrak{S} \times \mathfrak{H}]$$

($\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen).

Er steht also — wie es sein muß — senkrecht auf dem Bildvektor $\mathfrak{S}$.

Es wird

$$\frac{\partial x_m}{\partial u} = R\frac{\partial X}{\partial u} + Y\frac{\partial c}{\partial u} - Z\frac{\partial b}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial u}c - \frac{\partial Z}{\partial u}b,$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial v} = R\frac{\partial X}{\partial v} + Y\frac{\partial c}{\partial v} - Z\frac{\partial b}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial v}c - \frac{\partial Z}{\partial v}b.$$

Die Fundamentalgrößen lauten

$$-\bar{D} = \sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_m}{\partial u}\right) = R\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ X & Y & Z \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ a & b & c \end{vmatrix},$$

$$-\bar{D}' = \sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_m}{\partial v}\right) = R\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right) + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ X & Y & Z \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ a & b & c \end{vmatrix},$$

$$-\bar{D}_1' = \sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_m}{\partial u}\right) = R\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right) + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ X & Y & Z \\ \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ a & b & c \end{vmatrix},$$

$$-\bar{D}'' = \sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_m}{\partial v}\right) = R\sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ X & Y & Z \\ \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

Versteht man nun im folgenden unter γ die Zahl $+1$, wenn die Normalen der Bildkugel nach außen, die Zahl -1, wenn sie nach innen gerichtet sind, so gilt allgemein [1 S. 127 für die Bildkugel]

$$\gamma\left(Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u}\right) = \frac{1}{\Delta_0}\left(E_0\frac{\partial X}{\partial v} - F_0\frac{\partial X}{\partial u}\right)$$

und

$$\gamma\left(Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v}\right) = \frac{1}{\Delta_0}\left(F_0\frac{\partial X}{\partial v} - G_0\frac{\partial X}{\partial u}\right),$$

$$X\Delta_0 = \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u},$$

samt den sechs entsprechenden Gleichungen.

Beim Einsetzen dieser Beziehungen in obige Determinanten erhält man

$$(72)\quad \begin{cases} -\bar{D} = RE_0 - \dfrac{1}{\gamma\Delta_0}E_0\sum\left(\dfrac{\partial a}{\partial u}\dfrac{\partial X}{\partial v}\right) + \dfrac{1}{\gamma\Delta_0}F_0\sum\left(\dfrac{\partial a}{\partial u}\dfrac{\partial X}{\partial u}\right), \\ -\bar{D}' = RF_0 - \dfrac{1}{\gamma\Delta_0}E_0\sum\left(\dfrac{\partial a}{\partial v}\dfrac{\partial X}{\partial v}\right) + \dfrac{1}{\gamma\Delta_0}F_0\sum\left(\dfrac{\partial a}{\partial v}\dfrac{\partial X}{\partial u}\right) + \Delta_0\sum(aX), \\ -\bar{D}_1' = RF_0 - \dfrac{1}{\gamma\Delta_0}F_0\sum\left(\dfrac{\partial a}{\partial u}\dfrac{\partial X}{\partial v}\right) + \dfrac{1}{\gamma\Delta_0}G_0\sum\left(\dfrac{\partial a}{\partial u}\dfrac{\partial X}{\partial u}\right) - \Delta_0\sum(aX), \\ -D'' = RG_0 - \dfrac{1}{\gamma\Delta_0}F_0\sum\left(\dfrac{\partial a}{\partial v}\dfrac{\partial X}{\partial v}\right) + \dfrac{1}{\gamma\Delta_0}G_0\sum\left(\dfrac{\partial a}{\partial v}\dfrac{\partial X}{\partial u}\right). \end{cases}$$

Die Bedingung aber, daß (70) Mittelfläche ist, lautet

$$-[\bar{D}''E_0 - (\bar{D}' + \bar{D}_1')F_0 + \bar{D}G_0] = 0,$$

folglich

$$2R(E_0G_0 - F_0^2) + \frac{E_0G_0}{\gamma\Delta_0}\left[-\sum\left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right) + \sum\left(\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right)\right] + \frac{1}{\gamma\Delta_0}F_0G_0\cdot 0 + \frac{1}{\gamma\Delta_0}E_0F_0\cdot 0 - \frac{1}{\gamma\Delta_0}F_0^2\left[-\sum\left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right) + \sum\left(\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right)\right] = 0,$$

also (da $\gamma\Delta_0 \neq 0$)

$$2R\gamma\Delta_0 + \sum\left(\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right) - \sum\left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right) = 0.$$

Dieser Gleichung müssen die Funktionen a, b, c genügen. Faßt man nun (a, b, c) als Koordinaten einer Leitfläche eines Hilfsstrahlensystems (X, Y, Z) auf, es heiße „H-System", so können wir schreiben

$$(73)\qquad 2R\gamma\Delta_0 = D' - D_1'.$$

(D', D_1', Kummersche Fundamentalgrößen für das H-System).

Geometrische Konstruktion der K-Systeme.

Die Bedingung (73) läßt sich noch umformen. Bezeichnet man bei den H-Strahlen den Abstand des Mittelpunktes vom Brennpunkt mit δ, den Abstand vom Grenzpunkt mit d, so gilt [2 S. 140]

$$(2d)^2 - (2\delta)^2 = \frac{1}{\Delta_0^2}(D' - D_1')^2,$$

also hier

$$d^2 - \delta^2 = R^2.$$

Ist Ω der Winkel der 2 Brennebenen, die zu einem Systemstrahl gehören, so ist [2 S. 141]

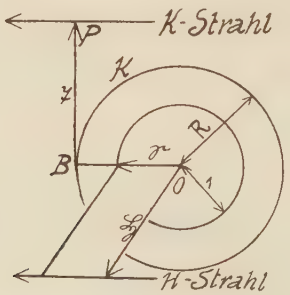
$$\sin \Omega = \frac{\delta}{d}$$

oder hier

$$\cos^2 \Omega = 1 - \sin^2 \Omega = \frac{d^2 - \delta^2}{d^2} = \frac{R^2}{d^2},$$

also (wegen $0 \leqq \Omega \leqq 90^0$)

$$\cos \Omega = \frac{1}{d} R, \quad \operatorname{tg} \Omega = \frac{1}{R} \cdot \delta.$$



Sind die H-Systeme bekannt, so lassen sich die K-Systeme mühelos konstruieren nach der Gleichung (71)

$$\mathfrak{T} = [\mathfrak{S} \times \mathfrak{H}]$$

(siehe Figur).

Die K-Systeme der in § 3 hergeleiteten Art lassen sich (für $\varepsilon \geqq 0$) auch als H-Systeme auffassen, und zwar für die K-Systeme mit dem Kugelradius $R = \varepsilon$. Wendet man daher auf sie obige Konstruktion an, wobei $R = \varepsilon$ zu nehmen ist, so erhält man wieder K-Systeme.

Wie vorauszusehen, ist [wie in 5 S. 152 ff.] bei $R = 0$ das H-System ein beliebiges Normalensystem [nach (73)]. Der Vektor $\mathfrak{T} = [\mathfrak{S} \times \mathfrak{H}]$ ändert sich nicht, wenn $\mathfrak{H}$ durch $\mathfrak{H} + t\mathfrak{S}$ ersetzt wird. Ein H-System liefert also für bestimmtes R nur ein K-System, gleichgültig, welche Fläche als Leitfläche des H-Systems gewählt wird [s. 5 S. 153/54].

Geometrische Konstruktion der K- bzw. H-Systeme.

Sind alle Normalensysteme bekannt, so kann man die Gesamtheit der K-Systeme mit $R = 0$ konstruieren. Ist weiterhin noch ein K-System mit $R = R_1 > 0$ gegeben, so lassen sich durch Addition von Vektoren alle K-Systeme mit $R \neq 0$ finden, wie wir sofort zeigen werden. Wir wollen die zu dem bekannten K-System gehörigen Größen und Punkte durch den Index 1 kennzeichnen. Für die Mittelfläche gilt dann:

$$x_1 = R_1 X + \lambda_1 \frac{\partial X}{\partial u} + \mu_1 \frac{\partial X}{\partial v} \text{ (entsprechend } y_1 \text{ und } z_1);$$

dabei ist

$$\lambda_1 = -u R_1 (1 + uv) + \frac{i}{2} \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} (1 + uv)^2,$$

$$\mu_1 = -v R_1 (1 + uv) - \frac{i}{2} \frac{\partial \Theta_1}{\partial u} (1 + uv)^2.$$

Ebenso versehen wir die Größen der K-Systeme mit $R = R_0 = 0$ mit dem Index 0.

Subtrahiert man von einer beliebigen Funktion $\Theta(u, v)$, durch die nach Gleichung (9) S. 7 ein K-System bestimmt ist, die gegebene Funktion $\frac{R}{R_1} \Theta_1(u, v)$, so bleibt als Differenz eine

Funktion von u und v übrig, welche wir als Funktion $\Theta_0(u, v)$ eines Systems mit $R = 0$ ansehen können. Wir dürfen also schreiben

$$\Theta(u, v) = \frac{R}{R_1}\,\Theta_1(u, v) + \Theta_0(u, v).$$

Dann wird

$$\lambda = \frac{R}{R_1}\left[-u R_1 (1 + u v) + \frac{i}{2}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v}(1 + u v)\right] + \frac{i}{2}\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}(1 + u v)^2$$
$$= \frac{R}{R_1}\lambda_1 + \lambda_0;$$

also werden die Gleichungen der Mittelfläche

$$(74)\quad x_m = \frac{R}{R_1}x_1 + x_0, \quad y_m = \frac{R}{R_1}y_1 + y_0, \quad z_m = \frac{R}{R_1}z_1 + z_0,$$

oder vektoriell geschrieben

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{R}{R_1}\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_0} = \frac{R}{R_1}(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{B_1P_1}) + \overrightarrow{OP_0} \\ &= R\mathfrak{S} + \frac{R}{R_1}\overrightarrow{B_1P_1} + \overrightarrow{OP_0}, \end{aligned}\right.$$

$$(76)\qquad \overrightarrow{OP} = R\mathfrak{S} + \frac{R}{R_1}\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_0 = R\mathfrak{S} + \mathfrak{T}.$$

Gleichung (75) zeigt die Konstruktion der Vektoren OP eines beliebigen K-Systems aus den Vektoren OP_1 des gegebenen K-Systems mit $R \neq 0$ und den Vektoren OP_0 eines der bekannten K-Systeme mit $R = 0$.

Gleichung (76) dagegen zeigt, wie man diese Vektoraddition auch schon bei den H-Systemen durchführen kann. Denn es ist

$$\mathfrak{T} = \frac{R}{R_1}\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_0 = \left[\mathfrak{S} \times \frac{R}{R_1}\mathfrak{H}_1\right] + [\mathfrak{S} \times \mathfrak{H}_0] = \left[\mathfrak{S} \times \left(\frac{R}{R_1}\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_0\right)\right]$$

also

$$[\mathfrak{S} \times \mathfrak{H}] = \left[\mathfrak{S} \times \left(\frac{R}{R_1}\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_0\right)\right];$$

das ist erfüllt für

$$\mathfrak{H} = \frac{R}{R_1}\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_0 .$$

Damit ist der Satz bewiesen: Kennt man die Gesamtheit der Normalensysteme und noch ein partikuläres H-System, das kein Normalensystem ist, so ist die Gesamtheit der H-Systeme (durch Vektoraddition) konstruierbar (und damit auch die Gesamtheit der K-Systeme).

K-Normalensysteme, besonders der Appellschen Flächen.

Ist das K-System ein Normalensystem, so muß $\overline{D'} = \overline{D_1'}$ sein, also nach (72)

$$\frac{1}{\Delta_0} E_0 \sum\left(\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}\right) - \frac{F_0}{\Delta_0}\left[\sum\left(\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right) + \sum\left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{\Delta_0} G_0 \sum\left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}\right) = 2\Delta_0 \sum (a X)$$

oder

$$2\Delta_0 \sum (a X) = -\frac{1}{\Delta_0}\left[E_0 D'' - F_0 (D' + D_1') + G_0 D\right].$$

Wählt man als Leitfläche der H-Systeme die Mittelfläche, so folgt

$$\sum (a X) = 0 ,$$

d. h. $\mathfrak{S}$ steht senkrecht auf $\mathfrak{H}$; die Mittelenveloppe dieser H-Systeme ist der Ursprung. Diese H-Systeme sind also identisch mit den K-Systemen des § 3 für $R = 0$. — Ist R_1 der Radius der Kugel K für das zu konstruierende K-System, so ergeben sich die H-Systeme aus Gleichung (13) für

$$\varepsilon = R_1 .$$

Für $R = \varepsilon = 0$ ist das H-System ein beliebiges K-Normalensystem mit $R = 0$. Die Konstruktion eines K-Normalensystems bedeutet hier wegen $R = 0$ und $\mathfrak{S} \perp \mathfrak{H}$ eine Vierteldrehung der

Vektoren $BP = OP = \mathfrak{T}$ um die zugehörigen Vektoren $\mathfrak{S}$ als Achse. Das neue System kann wieder als H-System aufgefaßt werden, und die Wiederholung der Vierteldrehungen liefert wieder ein Appellsches System. Es gilt also der bemerkenswerte Satz:

Dreht man jeden Strahl eines Appellschen Strahlensystems um den durch sein sphärisches Bild B bestimmten Vektor OB als Achse in positiver Richtung um 90^0 (oder jeden Strahl um das Doppelte, Dreifache davon), so ist das entstehende Strahlensystem wieder ein Appellsches Strahlensystem.

Literaturverzeichnis.

1) V. und K. Kommerell, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Bd. 1. 4. Aufl. (1931.)

2) — — Bd. 2. 4. Aufl. (1931.)
Beides in Göschens Lehrbücherei 1. Gruppe Bd. 20 u. 21.

3) Stahl-Kommerell, Die Grundformeln der Flächentheorie. (1893.)

4) Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differentialgeometrie. (1910.)

5) K. Kommerell, Strahlensysteme und Minimalflächen. In Mathemat. Annalen Bd. 70 S. 143—160. (1911.)

6) P. Appell, Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux. In American Journal of Mathematics Bd. 10 (1888) S. 175—186.

7a) De Montcheuil, Etude des surfaces définies par l'équation $R + R' = F(u) + F_1(u_1)$. (1898.)

7b) — Etude sur les surfaces réelles définies par l'équation $\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0$. (1899.) Beides in Bulletin de la Société Mathématique Bd. 26/27.

8) K. Zindler, Liniengeometrie mit Anwendungen. Bd. 2. (1906.)

9) K. Kommerell, Das System der Schraubenachsen bei beliebigen Bewegungen. In Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung Bd. 38 Heft 9—12 S. 281ff. (1929.)

Anmerkung: Auf die Literatur wird im Text unter diesen Nummern in eckigen Klammern Bezug genommen.

Lebenslauf.

Am 8. November 1907 bin ich, Walter Glatzle, Sohn des Oberlehrers Wilhelm Glatzle und seiner Ehefrau Rösle geb. Fezer, in Obergröningen, Oberamt Gaildorf, geboren. Von Herbst 1913 bis Frühjahr 1925 durchlief ich ordnungsgemäß die Elementarschule und das Realgymnasium in Eßlingen.

Anschließend studierte ich Mathematik und Physik, zunächst an der Technischen Hochschule in Stuttgart, dann an der Universität in Tübingen. Im Frühjahr 1929 legte ich die erste, 1930 die zweite Dienstprüfung für das Höhere Lehramt ab und erhielt eine Stelle als Repetent am Evang. Theol. Seminar in Schöntal an der Jagst.

Teilgenommen habe ich an Vorlesungen und Übungen der Herren Doetsch, Heer, Kutta, Loebell, Lotze, Pfeiffer, Regener, Reichenbach, Wilke-Dörfurt in Stuttgart; Gerlach, Kamke, Knopp, K. Kommerell, Landé, Schönhardt in Tübingen. Diesen meinen Lehrern danke ich herzlich. Herrn Professor Dr. Kommerell bin ich zu ganz besonderem Dank verpflichtet für die Anregungen, die Ratschläge und das Interesse, wodurch er meine Arbeit gefördert hat.